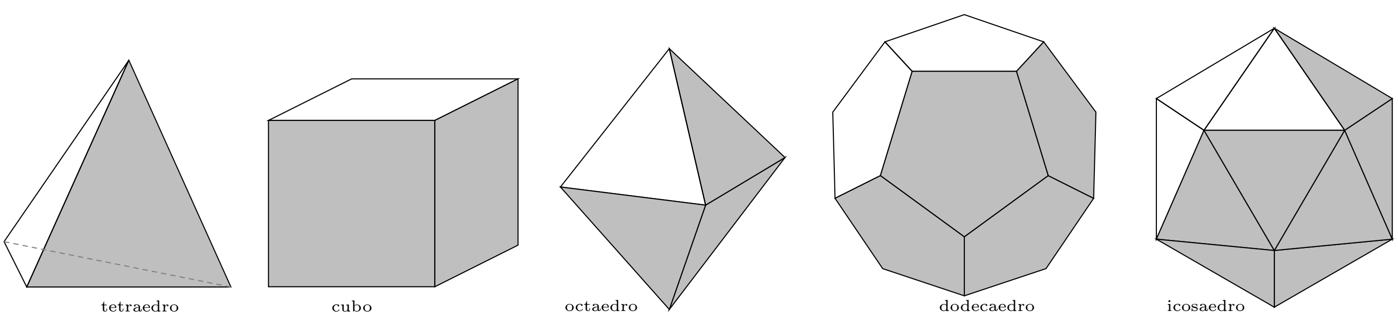
2^{o}BACHILLERATO

2^{o}BACHILLERATO
2^{o}BACHILLERATO
2^{o}BACHILLERATO

MATEMÁTICAS CIENCIAS SOCIALES II



25 de julio de 2018

Germán Ibáñez
http://www.otrapagina.com/matematicas

Índice general

Tema 1

MATRICES. DETERMINANTES

1.1. Matriz

Matriz de orden $m \times n$ es un cuadro formado por m filas y n columnas de números reales.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz 5×6

Observaciones

1. En un elemento de una matriz el subíndice primero indica su fila y el segundo su columna, a_{hk} es el elemento de la fila h, columna k.

2. Se llama diagonal principal a la formada por los elementos a_{ii}.

3. Se llama matriz fila si está formada por una sola fila (3,-2,0)

   Se llama matriz columna si está formada por una sola columna.

4. Llamaremos matriz triangular a aquella cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son 0
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Matriz cuadrada es la que tiene igual número de filas que de columnas.

6. Matriz traspuesta de una dada A, es la matriz A' obtenida cambiando filas por columnas, para obtenerla se escribe la 1^a fila como 1^a columna, la 2^a fila como 2^a columna, etc:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

1.2. Operaciones con matrices

1) **Suma**: para sumar dos matrices del mismo orden se suman los elementos correspondientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \\ 8 & -13 \end{pmatrix}$$

2) **Producto por escalar**: se multiplican todos los elementos por el número

$$(-3).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -15 & 0 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

3) **Producto de matrices**: dos matrices son multiplicables si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. El producto de una matriz de orden $m\times n$ por una matriz de orden $n\times p$ es una matriz de orden $m\times p$, en la que el elemento del lugar ij se obtiene operando la fila i de la 1^a matriz con la columna j de la 2^a matriz.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 0+1\cdot 2+(-1)\cdot(-5) & 2\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 2 & 0\cdot 0+3\cdot 2+0\cdot(-5) & 0\cdot 1+3\cdot 0+0\cdot 2 & 0\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Se verifican las propiedades y consecuencias de fácil comprobación:

1. Asociativa $A.(B.C) = (A.B).C$

   observación El producto no es conmutativo, tampoco entre matrices cuadradas.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Se llama matriz unidad o identidad a aquella cuyos elementos de la diagonal principal son 1 y los restantes 0. Al multiplicar una matriz por la matriz unidad se obtiene la misma matriz, es el neutro para el producto cuando se puede hacer éste.

   $$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Es distributivo respecto de la suma de matrices. $A.(B+C) = A.B + A.C$

4. La traspuesta del producto es el producto de las traspuestas cambiadas de orden

   $(A.B)' = B'.A'$

   Ejemplo Hallar la matriz A en la siguiente ecuación matricial $3A - CB' = DI_4$ siendo

   $$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$A = \frac{1}{3}(DI_4 + CB')$$

   $$CB' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 12 & 1 \\ 9 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}; \quad DI_4 = D; \quad D + CB' = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 13 & 0 \\ 7 & 6 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$A = \begin{pmatrix} 10/3 & 7/3 & 13/3 & 0 \\ 7/3 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Utilizando el producto de matrices un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial: $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 5z = 4 \\ 6x - y = 7 \end{array} \right.$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ o trasponiendo:

   $$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.3. Determinante de una matriz cuadrada

Determinante de una matriz cuadrada A, que se representa $|A|$

Determinante de orden 2 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

Ejemplos Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1; \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -103; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedades de los determinantes

1. Vemos que en cada sumando del desarrollo hay un elemento de cada fila y uno de cada columna.

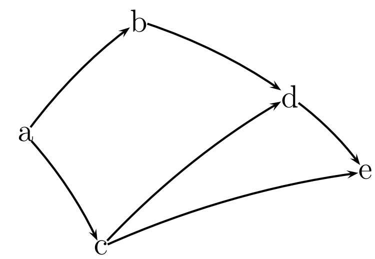
2. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

3. El determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes: $|A.B| = |A|.|B|$.

1.4. Aplicaciones de las matrices

Matriz asociada a un grafo: Dada una relación binaria en un conjunto cuando un elemento a está relacionado con otro b se pone un 1 en el correspondiente lugar de la matriz y 0 en otro caso. Consideremos el grafo de la figura:

$$M = \begin{array}{c|ccccc|} {}_{de}\,{}^{a} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



Se llama camino a una secuencia de arcos de tal manera que el vértice final de cada uno sirve de vértice inicial al siguiente. Un camino tiene longitud n si pasa por n arcos, y por tanto, recorre $n+1$ vértices.

Circuito es un camino cerrado en el que el vértice final coincide con el vértice inicial. Se detectan porque aparece 1 en algún elemento de la diagonal principal al hacer las sucesivas potencias de la matriz del grafo.

Ejemplo En el grafo anterior hallar si hay caminos de longitud ≥ 2 y si existen circuitos

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hay 2 caminos de longitud 2 entre a y d

hay 1 camino de longitud 2 entre a y e

hay 1 camino de longitud 2 entre b y e

hay 1 camino de longitud 2 entre c y e

$$M^3 = M^2.M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hay 2 caminos de longitud 3 entre a y e

$$M^4 = M^3.M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego no hay ningún camino de longitud 4, y al ser matriz nula, indica que el grafo no posee circuitos.

1.5. Problemas

1. Calcular $A'.B - C^2$. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 8 & -6 & -6 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Hallar la matriz P que verifique

   $P - B^2 = A.B$

   Solución: $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 18 \\ 13 & 10 & 31 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$.

3. Calcular a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

   c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

   Solución: a) 2, b) -36, c) -11

4. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Hallar $A + A^2 + A^3$

   Solución: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

5. Resolver el sistema matricial:

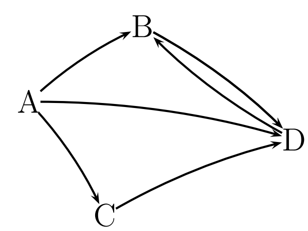
   $$\begin{cases} 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

   Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. Hallar la matriz M correspondiente al grafo

   a) Calcular $M^2 - M$

   b) hallar M^3 y M^4



   Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Un fabricante produce tres tipos de clavos, de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes 1; 1'5; 2 y 2'5 centímetros con los precios respectivos siguientes:

   Clavos A: 0'20 0'30 0'40 0'50 pts

   Clavos Q: 0'30 0'45 0'60 0'75 pts

   Clavos H: 0'40 0'60 0'80 1 pts

   Sabiendo que en un minuto se producen:

   De 1 cm de longitud: 100 A 50 Q 700 H

   De 1'5 cm de longitud: 200 A 20 Q 600 H

   De 2 cm de longitud: 500 A 30 Q 400 H

   De 2'5 cm de longitud: 300 A 10 Q 800 H

   Se pide:

   i) Resumir la información anterior en 2 matrices, M y N. M es una matriz 3×4 que recoja la producción por minuto y N matriz 4×3 que recoja los precios.

ii) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz M.N y dar su significado.

iii) Idem para la matriz N.M

Solución:

i)

	1	1'5	2	2'5
A	100	200	500	300
Q	50	20	30	10
H	700	600	400	800

	A	Q	H
1	0'20	0'30	0'40
1'5	0'30	0'45	0'60
2	0'40	0'60	0'80
2'5	0'50	0'75	1

ii) 430 precio de todos los clavos de aluminio, 49'5 de los de cobre, 1760 de los de acero (solo diagonal principal)

iii) 315 precio de los de 1 cm, 429 de 1'5 cm, 538 de los de 2 cm, 957'5 de los de 2'5 cm.

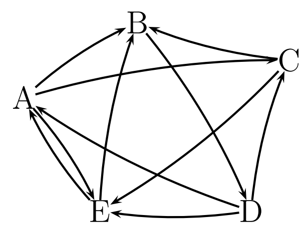
8. El psicólogo de una asesoría está estudiando la relación de ascendiente de un grupo de 5 personas: Antonio, Beatriz, Concha, David y Esteban. Mediante entrevistas personales, consigue establecer quién tiene ascendiente sobre quien por parejas. Empleando los datos que obtiene, elabora el siguiente grafo dirigido de 5 vértices donde, por ejemplo, A $\to$ B significa que Antonio tiene ascendiente sobre Beatriz.

a) Halla la matriz asociada M.

b) ¿Sobre cuantos compañeros tiene ascendiente cada persona?

c) ¿Cuantas personas hay que tienen ascendiente sobre persona que tiene ascendiente sobre otra persona?

d) Si sumamos $M + M^2$ ¿quién sería el líder?



Solución:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) A 3; B 1; C 2; D 3; E 2

c) M^2

d) D

Tema 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad en la que aparece una o varias incógnitas:

1)$x^2 - 3x = -2$

2)$3x - 2y + 5z - 3 = 0$

Solución de una ecuación son los números que al sustituir en las incógnitas cumplen la igualdad: en el ejemplo 1) las soluciones son 1 y 2; en el ejemplo 2) $x = 2, y = 4, z = 1$ es una solución pero hay infinitas soluciones dependientes de dos parámetros, pasando por ejemplo la y y la z como parámetros al segundo miembro quedaría: $x = \dfrac{2y}{3} - \dfrac{5z}{3} + 1$.

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones.

Cuando las incógnitas no tienen exponente (o sea tienen exponente 1) se dice que es ecuación lineal.

Se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de expresiones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

donde las "x" son las incógnitas, y tanto los coeficientes "a" como los términos independientes "c" son números reales.

Consideraremos la matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$ matriz asociada al sistema

Se llama **solución del sistema** a toda n-tupla de números que satisfaga las ecuaciones, es decir que al sustituir en el sistema verifica todas las ecuaciones.

2.2. Resolución de un sistema por el método de Gauss

Dos sistemas son **equivalentes** si toda solución del primero lo es del segundo y viceversa.

Teniendo en cuenta que al multiplicar los dos miembros de una igualdad por un número la igualdad subsiste, y de que si se suman varias igualdades resulta otra igualdad. Se tienen las siguientes reglas que permiten pasar de un sistema a otro equivalente más sencillo:

1) Se pueden intercambiar dos ecuaciones.

2) Se puede multiplicar (dividir) una ecuación por un número distinto de cero.

3) A una ecuación se le puede sumar (restar) otra.

4) Si hay dos ecuaciones iguales o proporcionales se puede eliminar una.

5) Se puede despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en las demás.

6) Es equivalente trabajar con las ecuaciones del sistema que trabajar con las filas de la matriz asociada.

El método de Gauss consiste en triangular la matriz asociada (conseguir ceros por debajo de la diagonal principal) mediante las operaciones arriba indicadas, de esta manera queda un sistema equivalente de cuya última ecuación se puede despejar una incógnita y luego ir sustituyendo los valores de las incógnitas de abajo arriba. Es un procedimiento particular de reducción.

Resultan las siguientes posibilidades al resolver un sistema:

a) Sistema compatible determinado, es decir, con solución única.

b) Sistema compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones.

c) Sistema incompatible, es decir, no tiene solución.

Ejemplo Resolver por el método de Gauss

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-5 \\ 2y+4z=7 \\ x+y-4z=-8 \\ 3y-4z=-3 \\ -x-y+4z=8 \end{array}\right. \text{ la matriz asociada es } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

se observa que la quinta fila es la $3^a \times (-1)$, la eliminamos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{rrrrr} 3^a\text{fila} - 1^a & & & & \\ & 1 & 1 & -4 & -8 \\ & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ suprimimos}$$

la última fila,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{rrrrr} 3^a \times 2 + 2^a \times (-3) & & & & \\ & 0 & 6 & -8 & -6 \\ & 0 & -6 & -12 & -21 \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix}$$

una vez triangulada volvemos a sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-5 \\ \ 2y+4z=7 \\ -20z=-27 \end{array}\right. \text{ resulta despejando y sustituyendo de abajo hacia arriba}$$

$z = \dfrac{27}{20}; \quad y = \dfrac{7 - 4\frac{27}{20}}{2} = \dfrac{4}{5}; \quad x = -5 + 2\dfrac{4}{5} = \dfrac{-17}{5}$
nota [1]

En la práctica nos limitaremos a sistemas con tres incógnitas como máximo.

Ejemplos

1. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = -4 \\ 4x + y + 4z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = -5 \quad \text{formamos la matriz:} \\ 4x - 3y + 5z = 4 \\ -2y + z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$ eliminamos la 4^a fila que es proporcional a la 2^a

$$\left(\begin{array}{rrrr} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3^a(-2) + 2^a \\ 4^a(-2) + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right)$$ eliminamos la 4^a fila $$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

sistema compatible determinado

Para resolverlo queda el sistema equivalente: $\begin{cases} 4x + 5y + 3z = -4 \\ -4y + z = 4 \\ z = 6 \end{cases}$ que resuelto sustituyendo da: $x = -49/8; y = 1/2; z = 6$

2. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ -4x + 5y - 11z = 11 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -11 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a + 1^a \cdot (-2) \\ 3^a + 1^a \cdot 4 \end{array}$$

---

[1] El método de Gauss-Jordan consiste en después de triangular la matriz asociada seguir consiguiendo ceros por encima de los elementos correspondientes a las incógnitas, y por último dividiendo por el coeficiente de cada incógnita conseguir que sea uno el coeficiente correspondiente a esa incógnita.

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{array}\right) 2^a \times 5 + 3^a \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 10 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{array}\right) 2^a/2 \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{array}\right) 1^a \times 5 + 2^a \times 2$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 5 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 5x = -17 \\ 5y = 4 \\ -20z = -27 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -9 \\ 0 & 9 & -15 & 27 \end{pmatrix} 3^a + 2^a \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eliminamos la última ecuación, sistema compatible indeterminado.

Dejando x e y en el primer miembro y considerando la última matriz resulta: $\begin{cases} x + y = 4 + z \\ -3y = -9 - 5z \end{cases}$

$y = \dfrac{9+5z}{3}; \quad x = \dfrac{3-2z}{3}; \quad z \in R$

3. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ reordenando $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a + 1^a \cdot (-3) \\ 3^a + 1^a \cdot (-2) \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} 3^a - 2^a \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

queda $0z = -1$ como última ecuación: sistema incompatible.

4. Resolver

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + 5y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a + 1^a \cdot (-2) \\ 3^a + 1^a \cdot (-4) \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = 4z; \quad y = -3z; \quad z \in R$

(un sistema en el que los términos independientes son 0 se llama **homogéneo**)

2.3. Problemas de sistemas de ecuaciones lineales con parámetro

Ejemplos

1. Discutir según los valores de m la compatibilidad del sistema:

$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ -2x - y + mz = 1 \\ 4x + my - 9z = -3 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & m & 1 \\ 4 & m & -9 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a + 1^a \cdot 2 \\ 3^a + 1^a \cdot (-4) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & m-6 & -1 \\ 0 & m-4 & 3 & 1 \end{pmatrix} 3^a - 2^a(m-4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & m-6 & -1 \\ 0 & 0 & 3-(m-4)(m-6) & m-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & m-6 & -1 \\ 0 & 0 & -m^2+10m-21 & m-3 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son los coeficientes de las incógnitas. Al despejarlas esos coeficientes pasan al denominador, por tanto:

para la discusión consideramos los valores que anulan a los elementos de la diagonal principal.

En nuestro caso:

$-m^2 + 10m - 21$ se anula para $m = 3, m = 7$

Discusión:

- Para $m \neq 3, m \neq 7$, es compatible determinado.
- para $m = 3$, sustituyendo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $y = -1 + 3z; x = 0$ compatible indet.
- para $m = 7$, sustituyendo: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ De la última filas

  "$0z = 4$" se concluye que es incompatible

2. Discutir según los valores de a la compatibilidad del sistema:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y - (a+1)z = 2 \\ ay + z = 0 \\ (a+1)x + (2a-1)y - (a-1)z = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -a-1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a+1 & 2a-1 & -a+1 & 1 \end{pmatrix} 3^a - 1^a$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -a-1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \end{pmatrix} 3^a - 2^a \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -a-1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son los coeficientes de las incógnitas. Al despejarlas esos coeficientes pasan al denominador, por tanto:

para la discusión consideramos los valores que anulan a los elementos de la diagonal principal.

En nuestro caso:

$a + 1 = 0$ se anula para $a = -1$ y también consideramos $a = 0$

Discusión:

- Para $a \neq 0, a \neq -1$, es compatible determinado.

- para $a=0$, sustituyendo: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ De las dos últimas filas
  ”$z=0; z=-1$” se concluye que es incompatible
- para $a=-1$, sustituyendo: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $z=-1; y=-1; 0x=0, x=\alpha$, compatible indet.

3. Discutir y resolver en caso de indeterminación:
   $\begin{cases} x+2y-kz=1 \\ -y+z=0 \\ kx+z=k \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & k \end{pmatrix} 3^a+1^a\cdot -k$

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2k & -k^2-1 & 0 \end{pmatrix} 3^a+2^a\cdot 2k \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2+2k-1 & 0 \end{pmatrix}$

   Para la discusión consideramos los valores que anulan a los elementos de la diagonal principal
   $-k^2+2k-1=0; \quad k^2-2k+1=0; \quad k=1$ doble

   Discusión:

   - Para $k \neq 1$ es compatible determinado.
   - Para $k=1$, sustituyendo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+z=0 \end{cases}$
     $y=z; x=1-2y+z=1-3z; \quad z\in R$ compatible indeterminado.

4. Estudiar según los valores de p y resolver cuando sea posible:
   $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x+y=-2 \\ 2x-py=-4 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -p & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 2^a\cdot(-3)+1^a \\ 3^a\cdot(-3)+1^a\cdot 2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & 3p+4 & 22 \end{pmatrix}$

   $3^a+2^a(+3p+4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 33p+66 \end{pmatrix}$

   $33p+66=0; \quad p=-2$

   - Para $p\neq -2$ es incompatible.
   - Para $p=-2$, es compatible indeterminado. Sustituyendo:

   $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ -y=11 \end{cases}$ $y=-11; \quad x=9$

5. El **rango** de una matriz es el número de filas que quedan al triangular, (después de tachar las filas de ceros).

   Estudiar el rango de la matriz A según los valores de k.

   $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2-k & 4 & 4-2k \\ 0 & 0 & k-4 & 0 \end{pmatrix}$

   - Para $k \neq 2, \quad 4$: Rango(A)$= 3$
   - Para $k = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} 3^a \cdot 2 + 2^a \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rango$(A) = 2$
   - Para $k = 4 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rango$(A) = 2$

2.4. Problemas de sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplos

1. La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es 48. Dentro de 10 años, el doble de la suma de las edades de los hijos, excederá en 6 años a la edad del padre. Cuando nació el pequeño, la edad del padre excedía en 6 unidades al triple de la edad que tenía el hijo mayor. Calcula las edades de los tres.

   x = edad actual del padre
   y = edad actual del hijo mayor
   z = edad actual del hijo menor

   $\begin{cases} x+y+z=48 \\ 2(y+10+z+10)-6=x+10 \\ (x-z)-6=3(y-z) \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=48 \\ -x+2y+2z=-24 \\ x-3y+2z=6 \end{cases}$

   $x = 40; y = 10; z = -2$

   luego el problema no está correctamente planteado pues se habla de edades actuales y el hijo menor no existe.

2. En una reunión, cierta parte de los presentes están jugando, otra parte están charlando y el resto, que es la cuarta parte del total, bailando. Mas tarde, 4 dejan el juego por el baile, 1 la charla por el juego y 2 dejan el baile por la charla, con lo cual, el número de personas que está en cada grupo es el mismo. ¿Cuántas personas componen la reunión?

   x juegan, y charlan, z bailan $\dfrac{x+y+z}{4} = z, \quad x-4+1 = z+4-2 = y-1+2$

   $\begin{cases} x+y+z=4z \\ x-3=y+1 \\ x-3=z+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-3z=0 \\ x-y=4 \\ x-z=5 \end{cases} \qquad x=11, y=7, z=6$

3. Los grifos A y B llenan un depósito en 1h 10m. Los grifos A y C lo hacen en 1h 24m. Los B y C en 2h 20m. Calcula el tiempo que tardarán en hacerlo cada uno por separado y los tres a la vez.

   x = parte del volumen que llena en un minuto el grifo A
   y = id B
   z = id C

   $$\begin{cases} 70(x+y)=V \\ 84(x+z)=V \\ 140(y+z)=V \end{cases} \qquad \begin{cases} 70x+70y=V \\ 84x+84z=V \\ 140y+140z=V \end{cases}$$

   $$\begin{pmatrix} 70 & 70 & 0 & V \\ 84 & 0 & 84 & V \\ 0 & 140 & 140 & V \end{pmatrix} \quad 2^a(5)+1^a(-6) \quad \begin{pmatrix} 70 & 70 & 0 & V \\ 0 & -420 & 420 & -V \\ 0 & 140 & 140 & V \end{pmatrix}$$

   $$3^a(3)+2^a \begin{pmatrix} 70 & 70 & 0 & V \\ 0 & -420 & 420 & -V \\ 0 & 0 & 840 & 2V \end{pmatrix} \text{ resulta: } \quad x=\frac{V}{105}, y=\frac{V}{210}, z=\frac{V}{420}$$

   $T_a.x=V; T_a=105min, T_b=210min, T_c=420min$; todos: $T(x+y+z)=V, T=60min.$

4. Tenemos 3 lingotes, cada uno de ellos formado por oro, plata y cobre. El primero tiene 65 g de oro, 25 g de plata y 10 g de cobre; el segundo tiene 5 g de oro, 45 g de plata y 50 g de cobre; y el tercero 20 g de oro, 45 g de plata y 35 g de cobre. cada uno de los lingotes se funde teniendo 3 aleaciones. ¿Cuántos gramos de cada aleación debemos tomar para formar otra aleación de 60 g que contenga 15 % de oro, 40 % de plata y el 45 % de cobre?.

   A_1: 1^a aleación, cada gramo tiene 0'65 oro, 0'25 plata y 0'1 cobre

   A_2: 2^a aleación, cada gramo tiene 0'05 oro, 0'45 plata y 0'5 cobre

   A_3: 3^a aleación, cada gramo tiene 0'2 oro, 0'45 plata y 0'35 cobre

   necesitamos x gramos de A_1, y gramos de A_2, z gramos de A_3, $x+y+z=60$

   veamos cuantos gramos de cada metal han de tener los 60 g de aleación final oro: 60.0'15 = 9, plata: 60.0'40 =24, cobre: 60.0'45 = 27

   oro: $x\cdot 0'65+y\cdot 0'05+z\cdot 0'2=9$
   plata: $x\cdot 0'25+y\cdot 0'45+z\cdot 0'45=24$
   cobre: $x\cdot 0'1+y\cdot 0'5+z\cdot 0'35=27$

   $$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 65x+5y+20z=900 \\ 25x+45y+45z=2400 \\ 10x+50y+35z=2700 \end{cases}$$

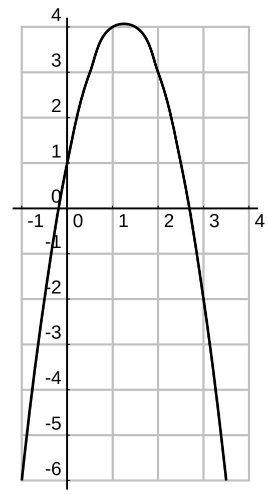
   $$\text{Simplificamos} \begin{cases} x+y+z=60 \\ 13x+y+4z=180 \\ 5x+9y+9z=480 \\ 2x+10y+7z=540 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 13 & 1 & 4 & 180 \\ 5 & 9 & 9 & 480 \\ 2 & 10 & 7 & 540 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -12 & -9 & -600 \\ 0 & 4 & 4 & 180 \\ 0 & 8 & 5 & 420 \end{pmatrix}$$

   $$\text{dividimos } 2^a \text{ por } 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -3 & -200 \\ 0 & 4 & 4 & 180 \\ 0 & 8 & 5 & 420 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -3 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

sería $z = -20$ el sistema es compatible pero la solución no tiene sentido con el enunciado, no es posible efectuar la aleación deseada.

5. Hallar el polinomio que pasa por los puntos:

x	-1	1	2
y	-6	4	3



Planteamos obtener una función polinómica de segundo grado
$y = ax^2 + bx + c$, resulta el sistema:

$$\begin{array}{l} y(-1) = -6 \\ y(1) = 4 \\ y(2) = 3 \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - b + c = -6 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{array} \right.$$

que tiene solución única y nos da la función $y = -2x^2 + 5x + 1$

2.5. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

Dada una matriz A su inversa es la matriz A^{-1} que verifica $A.A^{-1} = I$

Una matriz cuadrada que tiene inversa se llama regular y se caracteriza porque su determinante no es cero.

Ejemplos

- Hallar la inversa de: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

  Adjuntamos a la derecha la matriz unidad

  $$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) 2^a \cdot 3 + 1^a \cdot (-2) \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -2 & 3 \end{array}\right) 1^a \cdot 13 + 2^a \cdot 5 \left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & -13 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

  Ahora dividimos cada fila por su elemento de la diagonal principal:

  $$\begin{array}{l} 1^a/39 \\ 2^a/(-13) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{3}{39} & \dfrac{15}{39} \\ 0 & 1 & \dfrac{-2}{-13} & \dfrac{3}{-13} \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{1}{13} & \dfrac{5}{13} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{13} & -\dfrac{3}{13} \end{array}\right)$$

- Hallar la inversa de: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

  Adjuntamos a la derecha la matriz unidad y para evitar el cero en la esquina le sumamos a la primera fila la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 1^a + 2^a \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a - 1^a \\ 3^a \cdot 3 - 1^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 7 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} 3^a + 2^a \cdot 10 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1^a \cdot 3 + 3^a \cdot 2 \\ 2^a \cdot 3 - 3^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 & -19 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix} 1^a + 2^a \cdot 2 \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dividiendo cada fila por su elemento de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11/3 & 1/3 & -1 \end{array}\right)$$ las últimas tres columnas es la matriz inversa.

- Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la inversa a la izquierda: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad X = A^{-1} \cdot B$

La inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 4 \\ 19 & -9 & -13 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 4 \\ 19 & -9 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Resolver la ecuación matricial:

$X \cdot A = B - 2X$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$X \cdot A = B - 2X, \quad X \cdot A + 2X = B, \quad X(A + 2I_2) = B, \quad X = B \cdot (A + 2I_2)^{-1}$

$$(A + 2I_2) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

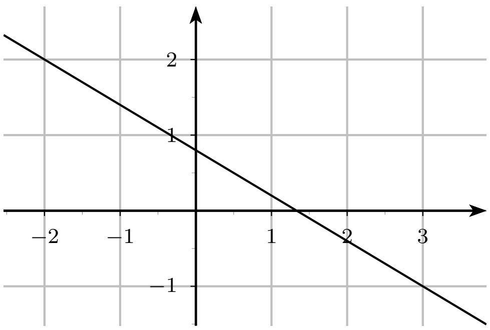
$$X = B \cdot (A + 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

2.6. Problemas

1. Resolver por todos los métodos $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ -3x + 4y = 7 \end{cases}$

   Solución: $x = 29/11, y = 41/11$

2. Halla la ecuación de la recta:



   Solución: $3x + 5y = 4$

3. En una tienda de antigüedades tienen 2 cuadros y una jarra de porcelana. La jarra vale 50 €. Uno de los cuadros más la jarra equivale al cuádruplo del precio del otro cuadro, mientras que este último cuadro y la jarra valen 40 €más que el primer cuadro. ¿Cuánto vale cada cuadro?

   Solución: $x = 30, y = 20$

4. Un peón es contratado en una finca por 200 pesos diarios cuando trabaja mañana y tarde, dándole además de comer. Cuando sólo trabaja por la mañana le dan 125 pesos, ya que no come. Hallar cuántos días trabajó sólo por la mañana, sabiendo que al cabo de un mes recibió 5.100 pesos.

   Solución: 12 días

5. Un muchacho dice "Tengo tantos hermanos como hermanas", y entonces una de sus hermanas dice "tengo hermanos y hermanas en la razón de 3/2". ¿Cuántos hermanos y hermanas son?

   Solución: $\begin{cases} x - 1 = y \\ \frac{x}{y-1} = 3/2 \end{cases}$ $x = 6, y = 5$

6. Para pagar una cuenta de 2.400 rupias un extranjero entrega 9 libras esterlinas y 15 dólares, recibiendo 75 rupias de vuelta. Y para pagar otra cuenta de 3.200 rupias, otro extranjero entrega 15 libras y 9 dólares y 35 rupias ¿A qué cambio en rupias se han cotizado las libras y los dólares?

   Solución: $\begin{cases} 9x + 15y = 2475 \\ 15x + 9y = 3165 \end{cases}$, $x = 175$ rupias vale cada libra, $y = 60$ rupias vale cada dólar.

Resolver por el método de Gauss

7. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = -2 \end{cases}$

   Solución: $x = 1, y = 7/4, z = -17/8$

8. $\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 4 \\ -x + 3y + z = 0 \\ 2x + 7y + 6z = -2 \end{cases}$

   Solución: $x = -25/12, y = -4/3, z = 23/12$

9. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 1 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = -2 \end{cases}$

   Solución: $x = -26, y = 3, z = 35$

10. $\begin{cases} -2x + y - 2z = 3 \\ -6x + 6y = 6 \\ -2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

    Solución: $x = -2 - 2z, y = -1 - 2z$

11. $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 5x - 4y + 3z = 1 \\ -5x + 6y - 2z = -4 \end{cases}$

    Solución: $x = -1 - z, y = -3/2 - z/2$

12. $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 3 \\ -2x - 4y + z = 8 \\ -2x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

    Solución: incompatible

13. $\begin{cases} 3x - 4y + z = -4 \\ -x - y + 2z = -4 \\ 7x - 7y = -4 \end{cases}$

Solución: $x = 12/7 + z, y = 16/7 + z$

14. $\begin{cases} -5x - 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 4 \\ 3x - 4z = -3 \end{cases}$

Solución: $x = -25/21, y = 122/63, z = -1/7$

15. $\begin{cases} -x + 4y + 4z = 3 \\ 6x - y = -4 \\ -5x - 3y - 4z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Solución: $x = -3, y = -14, z = 14$

16. $\begin{cases} 3x - 3y + 4z = -3 \\ 2x - y + z = -4 \\ 3x + y + 2z = -4 \end{cases}$

Solución: $x = -5/2, y = 1/2, z = 3/2$

17. $\begin{cases} -2x - 3y - 3z = 1 \\ -2x + 4z = 4 \\ 3x + 3y + z = -3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 2z - 2, y = \frac{3-7z}{3}$

18. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 5x - 4z = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Solución: incompatible

19. Por un kg. de pescado, otro de legumbres y otro de fruta se han pagado 11'2 €. Hallar lo que cuesta cada cosa sabiendo que el kg de legumbres cuesta 0'8 €más que el de frutas y que el kg de pescado vale tanto como uno de legumbres y otro de fruta juntos.

Solución: $x = 5'6, y = 3'2, z = 2'4$

20. Hallar las edades de tres hermanos sabiendo que sumadas dos a dos dan 7, 10 y 13 años.

Solución: 2,5,8

21. Un señor tiene dos hijos, de los cuales uno tiene 6 años más que el otro. Después de 2 años la edad del padre será doble de la suma de las edades de sus hijos, y hace 6 años su edad era 4 veces la suma de las edades de sus hijos. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Solución: padre: 54, hijo 1^0: 15, hijo 2^0: 9

22. Hallar un número de tres cifras, sabiendo que la diferencia entre este y el que resulta de invertir el orden de sus cifras es 198, la cifra de las centenas más la cifra de las decenas y la de las unidades es 6.

Solución: indet, 240, 321, 402

23. Un peatón sube las cuestas a 3 km/h, baja a 8 km/h y va por el llano a 6 km/h. Para ir de A a B, que distan 11 kms. tarda $1 + \frac{23}{24}$ h y en volver tarda $2 + \frac{7}{12}$ h. Hallar las longitudes de los tramos de cada tipo que hay entre A y B.

Solución: velocidad = espacio/tiempo

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{8} + \frac{z}{6} = \frac{47}{24} \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = \frac{31}{12} \\ x + y + z = 11 \end{cases}, \ x = 2, y = 5, z = 4$$

24. El salario medio percibido por los empleados de una empresa es de 800 €El salario medio de los empleados varones de la misma es de 850 €y el salario medio de las empleadas mujeres es de 780 €. Determinar la proporción de hombres y mujeres que trabajan en la empresa.

Solución: proporcion 2h/5m

25. En un servicio de taxi se abona una cantidad inicial fija (bajada de bandera) y un tanto por km recorrido. Si una carrera de 2 km cuesta 2'30 libras y otra de 5 km 4'25

libras, averiguar cuánto cuesta una carrera de 3 km y cuánto cuesta la bajada de bandera.

Solución: bajada bandera 1'00 libras, carrera 3 km 2'95 libras

26. Resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{array}\right.$

    ¿Es posible sustituir el término independiente 9 de la primera ecuación por algún otro número de forma que el sistema obtenido no tenga solución?

    Solución: $x=1, y=2, z=3$, siempre será compatible determinado

27. Explicar en qué consiste el método de Gauss para la resolución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas.

28. Un estado compra 540.000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 31 \$ el barril, respectivamente, la factura total asciende a 16 millones de \$. Si del primer suministrador recibe el 30 % del total del petróleo comprado. ¿Cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

    Solución: 162000 barriles de 27 \$, 30667 de 28 \$, 347333 de 31 \$

29. Hallar la inversa de la matriz:

    $$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

    $$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

30. Hallar la inversa de la matriz:

    $$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

    $$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/11 & 2/11 & 1/11 \\ 6/11 & 12/11 & -5/11 \\ 2/11 & -7/11 & 2/11 \end{pmatrix}$$

31. Hallar la inversa de la matriz:

    $$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

    $$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4/23 & 4/23 & -3/23 \\ -9/23 & 14/23 & 1/23 \\ 1/23 & 1/23 & 5/23 \end{pmatrix}$$

32. En un hotel, al vender pesetas pagadas en francos, aplican una comisión fija por cada operación y un precio determinado de la peseta, expresado en francos. En una operación, por 5.772 rupias, cobran 300 francos en total. En otra, por 16.497 rupias cobran 850 francos. ¿Cuántas pesetas darán por 1.245 francos?

    Solución: $y=ax+b$, 24199'5 rupias

33. Dados los puntos (-1,4), (1,-2) y (5,3). Hallar y representar aproximadamente:

    a) La recta que pasa por los puntos 1^0 y 3^0.

    b) La parábola que pasa por los tres puntos.

    Solución: a)$y=-\frac{-1}{6}x+\frac{23}{6}$ b) $y=\frac{17}{24}x^2-3x+\frac{7}{24}$

34. Discutir según los valores del parámetro: $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-tz=2 \\ x+y+tz=10 \end{array}\right.$

    Solución: $t\neq 8$ sist comp. det, solución única; $t=8$ sist comp indet infinitas soluciones

35. Discutir y resolver según los valores del parámetro: $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{array}\right.$

Solución: bajar parámetro a la última, $a \neq -8$ sist comp det, solución trivial 0; $a = -8$, compatible indet $x = z/19, y = 7z/19$

36. Discutir según los valores del parámetro y resolver en caso de indeterminación: $\begin{cases} x + y = 1 \\ ty + z = 0 \\ x + (1 + t)y + tz = t + 1 \end{cases}$

Solución: $t \neq 0, 1$ sist comp det; $t = 0$, compatible indet $x = 1 - y, z = 0$; $t = 1$ incompatible

37. Discutir según los valores del parámetro: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 3x + 3y + tz = 9 \end{cases}$

Solución: $t \neq 3$ sist compatible indet; $t = 3$, compatible indet $\begin{cases} x = 3 - y \\ y \in R \\ z = 0 \end{cases}$

38. Discutir según los valores del parámetro y resolver en caso de indeterminación: $\begin{cases} ax + y = 2 \\ y + z = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$

Solución: $a \neq 0, \pm 1$ sist comp det; $a = 0$, compatible indet $z = -1, y = 2, x \in R$; $a = -1$ incompatible ; $a = 1$ incompatible

39. Discutir según los valores del parámetro: $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$

Solución: $a \neq 2$ sist comp det; $a = 2$ incompatible

40. Discutir según los valores del parámetro y resolver en caso de indeterminación: $\begin{cases} 3x - 4y + z = -4 \\ -x - y + 2z = -4 \\ 7x - 7y + az = -4 \end{cases}$

Solución: $a \neq 0$ sist comp det; $a = 0$, compatible indet $x = \dfrac{12 + 7z}{7}, y = \dfrac{16 + 7z}{7}, z \in R$

41. Resolver la ecuación matricial:

$X \cdot A + B = C$ siendo:

$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Solución: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

42. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación: $B \cdot X - A = 2X$

$X = (B - 2I)^{-1} A$

$B - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -0'25 & 0'25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = (B - 2I)^{-1} A = \begin{pmatrix} -0'25 & 0'25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

43. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación: $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$ siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I; \quad A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I; \quad (A \cdot B - C)X = I; \quad X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot I = (A \cdot B - C)^{-1}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A \cdot B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = X$

44. Discutir según los valores del parámetro el sistema de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2+k & k & 3 \\ 0 & 0 & k-3 & 6-2k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ (2+k)y+kz=3 \\ (k-3)z=6-2k \end{cases}$$

Para $k \neq 3, k \neq -2$ tiene solución única, sistema compatible determinado.

Para $k=3$ queda el sistema $\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ -y+3z=3 \\ 0z=0 \end{cases}$ sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones.

Para $k = -2$ queda el sistema $\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ -2z=3 \\ -5z=10 \end{cases}$ sistema incompatible, sin solución.

Tema 3

PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1. Desigualdades e inecuaciones

Las desigualdades son:

$<$ ... menor que ...	$\leq$ ... menor o igual que ...
$>$ ... mayor que ...	$\geq$ ... mayor o igual que ...

Propiedades de las desigualdades y aplicación a la resolución de inecuaciones:

1^a Si se suma o se resta un número a los dos miembros de una desigualdad, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

Aplicación: Transposición de términos: un término con $+$, pasa con $-$, y un término con $-$, pasa con $+$.

Ej. $2x - 5 < 5x - 2; \quad 2x - 5x < 5 - 2$

2^a A) Si se multiplican o dividen los dos términos de una desigualdad por un número positivo, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

Ej. $-5 \leq 2; \quad -5 \times 3 \leq 2 \times 3; \quad -15 \leq 6$

2^a B) Si se multiplica o divide los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, resulta otra desigualdad de sentido contrario. Ej. $-5 < 2; \quad -5 \times (-7) < 2 \times (-7); \quad 35 > -14$

Aplicación: Quitar denominadores, multiplicando por el m.c.m, de los denominadores.

Ej. $\dfrac{2x-3}{5} \leq 1 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{x}{10}$ multiplico por 10 (positivo) y queda: $4x - 6 \leq 10 - 35 + x$

Aplicación: Despejar la x pasando su coeficiente al otro miembro.

Ej. $5x < 12$ divido por 5 (positivo) $x < \dfrac{12}{5}$

Ej $-3x < -7$ divido por -7 (negativo) $x > \dfrac{-7}{-3}$

Inecuaciones lineales con una incógnita Ejemplo resolver:

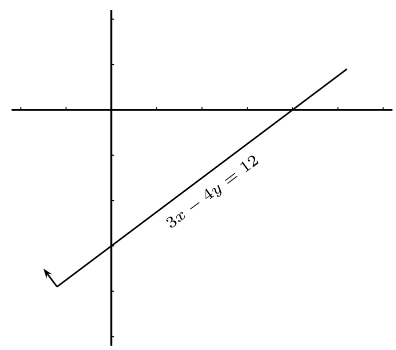
$$\frac{x-1}{-3}-\frac{2x+3}{2}\leq x$$
$$\frac{-x+1}{3}-\frac{2x+3}{2}\leq x$$
$$-2x+2-6x-9\leq 6x$$
$$-2x-6x-6x\leq 9-2$$

$$-14x\leq 7$$
$$x\geq\frac{-7}{14}$$
$$x\geq\frac{-1}{2}$$

3.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Semiplanos.

Son expresiones de la forma $ax+by>c$.

Su representación gráfica es un semiplano cuya frontera es la recta $ax+by=c$.
Para ver cual de los dos semiplanos es el solución se estudia si un punto es solución (por ejemplo el origen), en caso afirmativo su semiplano es el semimplano solución.
La frontera está incluida en la solución si la desigualdad es no estricta.



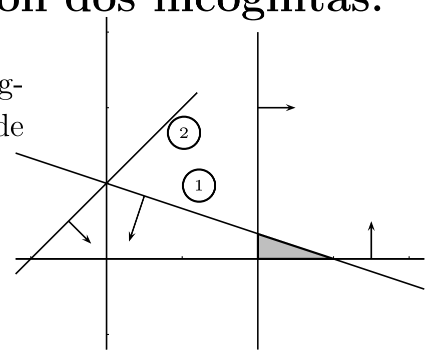
Ejemplo Resolver $3x-4y\leq 12$

x	0	4
y	-3	0

Probamos el origen: $3\cdot 0-4\cdot 0\leq 12$ sí es solución.

3.3. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

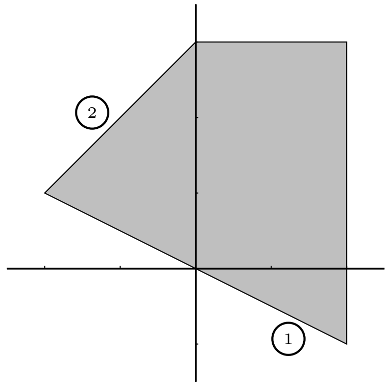
La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas vendrá dada por la intersección de los semiplanos solución de cada inecuación. Se llama **Región factible**.



Ejemplo 1 Resolver:

$$\begin{cases} x+3y\leq 3 & (1)\\ x\geq 2 & \\ x-y+1\geq 0 & (2)\\ y\geq 0 & \end{cases}$$

Ejemplo 2 Dar el sistema de inecuaciones que define la región:



$$(1): y = ax + b \begin{cases} f(-2) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \qquad y = -\frac{x}{2}$$

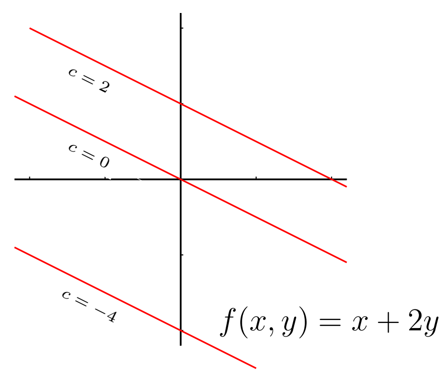
$$(2): y = ax + b \begin{cases} f(-2) = 1 \\ f(0) = 3 \end{cases} \qquad y = x + 3$$

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ x \leq 2 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ y \leq x + 3 \end{cases}$$

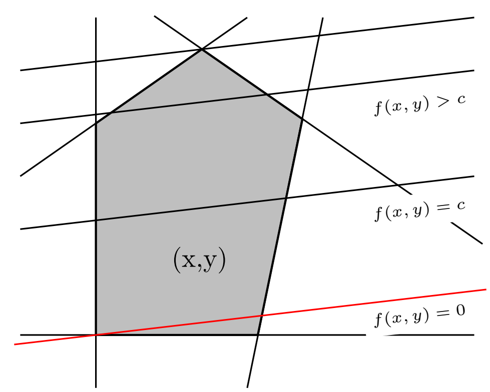
3.4. Función lineal de dos variables

Es de la forma $f(x, y) = ax + by$.

El conjunto de los puntos (x, y) que verifican $f(x, y) = c$ es la recta $ax + by = c$, al variar c obtenemos rectas paralelas.

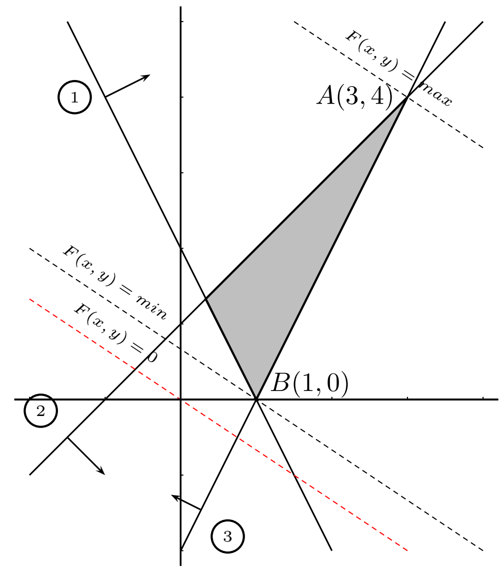


Si los valores de x e y están restringidos a una cierta región del plano, la función no podrá tomar cualquier valor y entonces cabe hablar de valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ en esa región. Se tiene que:



El máximo o el mínimo de una función lineal se alcanza en puntos de la frontera

Ejemplo Dado el conjunto solución del sistema:



$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 & (1) \\ -x + y \leq 1 & (2) \\ 2x - y \leq 2 & (3) \end{cases}$$ hallar si la función $F = 2x + 3y$ posee máximo y mínimo en él.

Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x,y) = 0 \quad 2x + 3y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -3 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$

Para hallar el máximo observamos cual es la paralela que pasa por un vértice que hace mayor el valor de "F" es la que pasa por A.

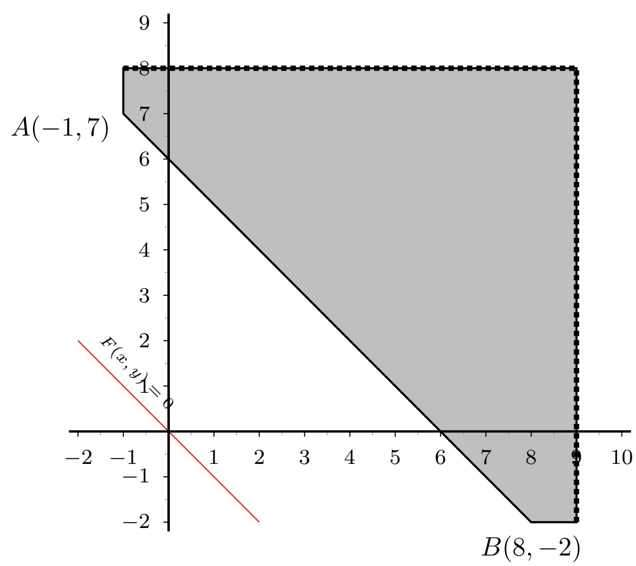
El valor máximo de $F(x) = 2x + 3y$ en la región factible se alcanza en el punto $A(3,4)$ y vale $f(3,4) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$

Para hallar el mínimo observamos cual es la paralela que pasa por un vértice que hace menor el valor de "F" es la que pasa por B.

El valor mínimo de $F(x) = 2x + 3y$ en la región factible se alcanza en el punto $B(1,0)$ y vale $f(1,0) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2$

Ejemplo Maximizar y minimizar, si es posible, la función $f(x,y) = x + y$ en la región dada por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq -1 & (1) \\ y \geq -2 & (2) \\ y \geq 6 - x & (3) \end{cases}$$



Representamos la recta $y = 6 - x$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array}$,

y ya podemos dibujar la región factible:

Ahora representamos la función de dos variables igualada a 0.

$f(x,y) = x + y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -2 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$

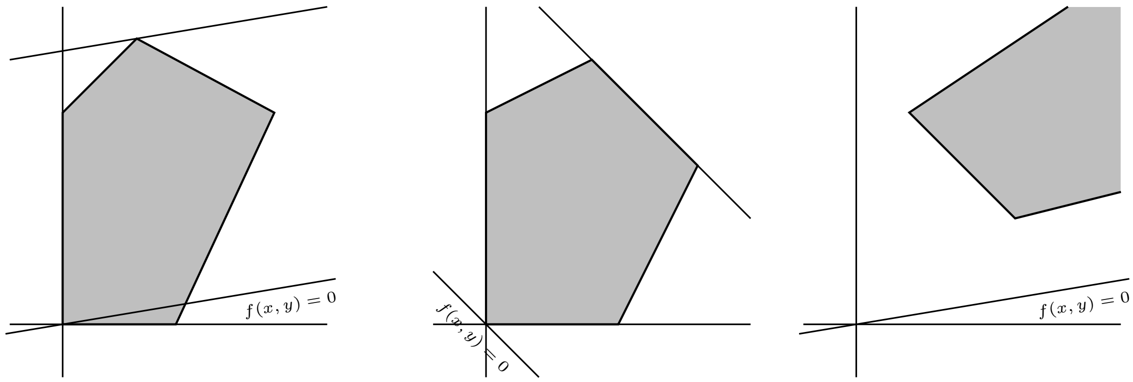
Observamos que "f" crece hacia la derecha y hacia arriba, la región factible no está acotada en esa zona. Por tanto la función "f" no alcanza un máximo en un punto concreto.

Para el mínimo será lo más a la izquierda y abajo posible, vemos que $f(-1,7) = -1 + 7 = 6$; $f(8,-2) = 8 - 2 = 6$

Por tanto "f" alcanza el mínimo en todos los puntos del segmento de extremos $(-1,7), (8,-2$ y vale 6.

Casos posibles al maximizar una función lineal

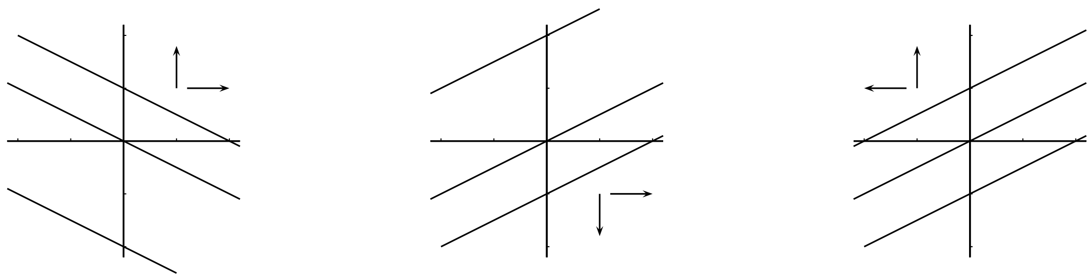
una solución	infinitas soluciones	no hay punto donde la función tenga máximo



$f(x,y)=0$
$f(x,y)=0$
$f(x,y)=0$

Según los signos de los coeficientes de x y de y se observa cual es al dirección en que aumenta la función: C aumenta para:

x +2y = C	x -2y = C	-x +2y = C
derecha arriba	derecha abajo	izquierda arriba



3.5. Problemas de programación lineal con dos variables

Estos problemas pretenden optimizar (buscar el máximo o mínimo) una función lineal $F(x, y) = ax + by$, llamada función objetivo, cuando las variables están sometidas a restricciones dadas por inecuaciones lineales, llamada región factible.

Para ello representamos la región del plano determinada por las inecuaciones y buscamos el punto de la frontera para el que la función objetivo se optimiza. Esto se hace, bien analíticamente (sustituyendo los valores extremos en la función objetivo), bien gráficamente viendo la paralela a la recta $F(x, y) = 0$ que toca a un punto extremo para el que se optimiza.

Pueden tener solución única (un punto), múltiple (los puntos de un segmento) o no tener solución (cuando la región no está acotada por la parte que se quiere optimizar).

Ejemplos

1. Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg de chocolate, 100 kg de almendras y 85 kg de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 kg de chocolate, 1 kg de almendras y 1 kg de frutas; la de tipo B contiene 2 kg de chocolate, 1'5 kg de almendras y 1 kg de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 13 y 13'50 euros, respectivamente. ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta?

   1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

   $x = n^0$ de cajas tipo A

   $y = n^0$ de cajas tipo B. Ganancia: $F(x, y) = 13x + 13'50y$

chocolate:

$3x + 2y \leq 500 \quad (1)$

x	0	$166'6$
y	250	0

almendras:

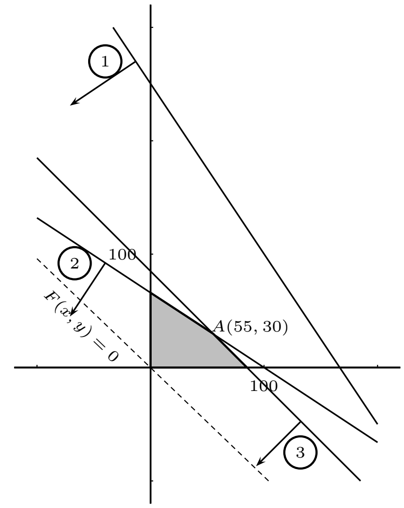
$x + 1'5y \leq 100 \quad (2)$

x	0	100
y	$66'6$	0

frutas: $x + y \leq 85 \quad (3)$

x	0	85
y	85	0

además: $x \geq 0 \quad y \geq 0$ pues x e y no pueden ser negativas



2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x, y) = 0 \quad 13x + 13'50y = 0$

x	0	-135
y	0	130

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$$\begin{cases} x + 1'5y = 100 \\ x + y = 85 \end{cases} \qquad \text{es } (55, 30)$$

Luego para obtener la mayor ganancia el fabricante deberá producir 55 cajas de tipo A y 30 de tipo B.

La ganancia será entonces: $F(55, 30) = 13 \cdot 55 + 13'50 \cdot 30 = 1120$ euros.

2. El veterinario recomienda a un ciego que, durante un mes, el perro tome diariamente 4 unidades de hidratos de carbono, 23 de proteínas y 6 de grasas. En el mercado se encuentran dos marcas, M_1 y M_2, ajustadas a la siguiente distribución de principios nutritivos:

	H	P	G	Precio
M_1	4	6	1	100
M_2	1	10	6	160

¿Cómo deberá combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? (Problema de la dieta)

Sea $x = n^0$ de latas tipo M_1
$y = n^0$ de latas tipo M_2.
Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:
Función objetivo a minimizar

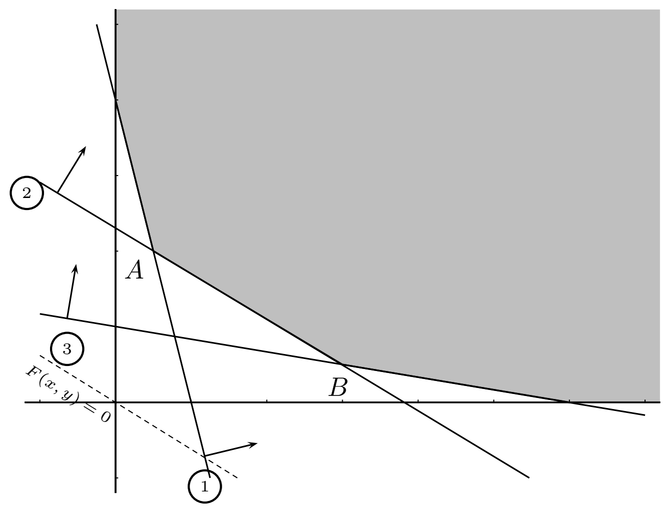
precio: $F = 100x + 160y$

hidratos: $4x + y \geq 4 \quad (1)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$

proteínas: $6x + 10y \geq 23 \quad (2)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3'8 \\ \hline y & 2'3 & 0 \end{array}$

grasas: $x + 6y \geq 6 \quad (3)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$

además: $x \geq 0 \quad y \geq 0$



Función objetivo: $100x + 160y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -160 \\ \hline y & 0 & 100 \end{array}$

Como no se ve con claridad en la figura en qué punto de la frontera corresponde el mínimo comprobamos el valor de F en los dos puntos extremos A y B

$F(\frac{1}{2}, 2) = 370, \quad F(3, \frac{1}{2}) = 380$

luego la solución más barata es emplear media lata de la marca M_1 combinada con dos de la marca M_2 al día. Con lo que se obtiene:

$4.\frac{1}{2} + 2 = 4 \geq 4$
$6.\frac{1}{2} + 10{,}2 = 23 \geq 23$
$\frac{1}{2} + 6{,}2 = 12'5 \geq 6$

Se aprovechan al máximo los dos primeros principios alimenticios porque el punto extremo que proporciona el mínimo es la intersección de las fronteras de sus dos condiciones y aunque sobra del tercero, se obtiene la máxima economía.

3.6. Problemas

1. Resolver a) $5x - 3 \leq \dfrac{14x+7}{2}$

   b) $3 - 2x \geq \dfrac{5-3x}{4}$

2. Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las desigualdades

   $x + y - 3 \leq 0$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$
   $x - y + 2 \geq 0$

3. Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las desigualdades

   $2x - y \geq -2$
   $x - y \geq -2$
   $x \leq 1$
   $2x - y \leq 3$

4. Minimizar la función z = 12x + 4y sujeta a las siguientes restricciones:

   $x + y \geq 2$
   $x \leq 1/2$
   $y \leq 4$
   $x - y \leq 0$

   Solución: $P(-2, 4)$

5. Maximizar la función z del ejercicio anterior con las mismas restricciones.

   Solución: $P(1/2, 4)$

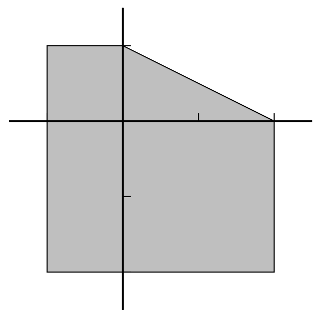
6. Hallar las parejas de valores no negativos (x,y) que minimizan la función z = 3x + 2y, con las siguientes restricciones:
   $7x + 2y \geq 14$
   $4x + 5y \geq 20$

   Solución: $Q(10/9, 28/9), z(Q) = 86/9$

7. Minimizar la función $z = 500000x + 400000y$, con las siguientes restricciones:
   $12x + 5y \leq 120$
   $6x + 8y \leq 180$
   $5x + 10y \leq 100$
   $x + y \geq 7$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

   Solución: $z(0, 7) = 2{,}800000$, infinitas

8. Maximizar y minimizar $z = 100x - 150y$ en la región representada. Hallar el sistema de inecuaciones correspondiente.



   Solución: $\min(-1, 1)$ $\max(2, -2)$

9. Se considera el recinto plano de vértices (0,0), (1,3), (3,3) en el que están incluidos los tres lados y los tres vértices de las rectas asociadas a las desigualdades

   a) Hallar las inecuaciones que definen el recinto.

   b) Maximizar la función $Z = 3x - 6y$ sujeta a las restricciones del recinto.

   Solución: Las inecuaciones son: $y \leq 3; y - x \geq 0; y - 3x \leq 0$. La función es máxima para (0,0) y el valor alcanzado es 0.

10. Una compañía tiene dos minas. La mina A produce diariamente una tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad. La mina B

produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 150 \$ y los de la mina B a 200 \$. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?.

Solución: $x = 60$ días en A, $y = 5$ días en B, coste mínimo $F(60, 5) = 10000$ \$

11. Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuantos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

   Solución: $x = 3$ contenedores, $y = 2$ contenedores, $F(3, 2) = 1050$ km mínima distancia

12. Un fabricante de productos químicos vende fertilizantes, A y B, a razón de 40 y 20 euros el kilogramo, respectivamente. Su producción máxima es de una tonelada de cada fertilizante y su mínimo operativo es de 100 kilogramos de cada fertilizante. Si su producción total es de 1700 kilogramos máximo, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcular dichos ingresos máximos.

   Solución: El máximo beneficio se daría con una producción de 1 tonelada de fertilizante A y 700 kg de fertilizante B. El beneficio máximo que se produciría con estas cantidades sería de 54000 euros.

13. En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina. Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber al menos tantos bidones de gasolina como de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo. 1. Exprésese la función objetivo y las restricciones del problema. Represéntese gráficamente. 2. Resuélvase el problema

   Solución: El mínimo está en el punto $(25, 25)$ y el gasto es 1250

14. Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

   Solución: El artesano tiene que fabricar 30 collares y 20 pulseras para obtener el máximo beneficio, que asciende a 230 euros.

15. Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas,

produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones: El número total de unidades no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere dos horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas. El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

Solución: z(0, 10/3) = 100 z(2, 2) = 100

Como el número de sillas y mesas producidas tiene que ser un número entero la solución sería dos sillas y dos mesas.

16. Una persona puede invertir hasta 1 millón de euros. Su asesor fiscal le sugiere que invierta en dos tipos de acciones A y B. Las acciones A implican algo de riesgo, pero tienen un rendimiento anual del 10 %, mientras que las acciones B son más seguras pero su rendimiento es del 7 %. El inversor decide invertir como máximo 600000 euros en las acciones A y por lo menos 200000 euros en las acciones B. Además decide que lo invertido en A sea por lo menos igual a lo invertido en B. ¿Cómo debe realizar su inversión para que sus ganancias anuales sean máximas?.

    Solución: 600000 euros en A, 400000 euros en B

17. Una fábrica de automóviles y camiones tiene dos talleres. En el taller A para hacer un camión deben trabajar 7 días-operario, en cambio para fabricar un automóvil se precisa 2 días-operario. En el taller B invierten 3 días-operario tanto en la terminación de un camión como en la de un automóvil. Debido a las limitaciones de hombres y maquinaria, el taller A dispone de 300 días-operario, mientras que el taller B dispone de 270 días-operario. Si el fabricante obtiene una ganancia de 60000 euros en cada camión y 20000 euros en cada automóvil, ¿cuántas unidades de cada uno deberá producir la fábrica para maximizar su ganancia?

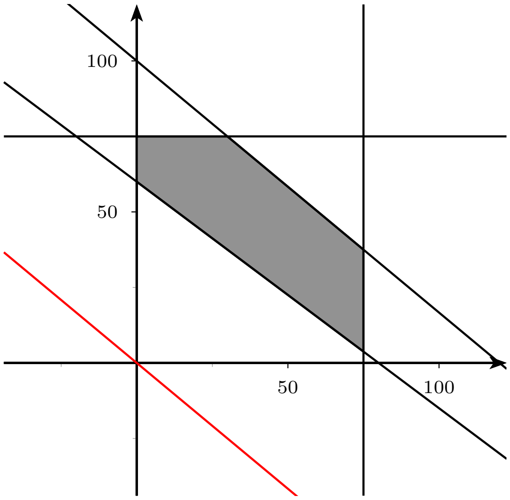
    Solución: $x = 24$ camiones, $y = 66$ coches, $F(24, 66) = 2'76$ millones de euros

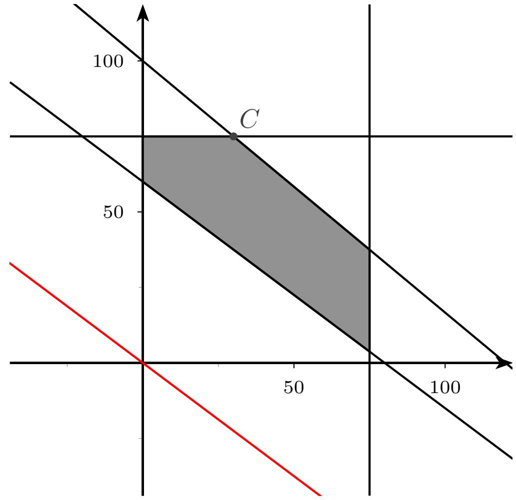
18. Un artesano dispone de 6 unidades de mimbre y trabaja 28 horas a la semana. Fabrica sombreros y cestos. Cada sombrero necesita 1 u. de mimbre y 8 horas de trabajo, cada cesto 2 u. de mimbre y 7 horas de trabajo. Gana por cada sombrero 80 u. m. y por cada cesto 120 u.m. ¿Cuántas unidades de cada producto debe fabricar a la semana si desea maximizar sus ingresos?

    Solución: max para $(14/9, 20/9)$; 3 cestos, 0 sombreros

19. Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

    Solución:





$f(x) = \begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1'2y \leq 120 \end{cases}$ $f(30, 75) = 780m^2$

$f(x) = \begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1'2y \leq 120 \end{cases}$ $f(0, 60) = 72$

20. Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener máximo rendimiento. Calcúlese dicho rendimiento máximo.

Solución:

21. Dos pinturas A y B tienen ambas dos tipos de pigmentos p y q; A está compuesto de un 30 % de p y un 40 % de q, B está compuesto de un 50 % de p y un 20 % de q, siendo el resto incoloro. Se mezclan A y B con las siguientes restricciones: La cantidad de A es mayor que la de B. Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos. B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos.

a) ¿Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento p?

b) ¿Qué mezcla hace q mínimo?

Solución: a) F (60, 30) = 33

b) F (20, 10) = 10 .

22. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2 g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5 g. Además se utiliza por lo menos 1 g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4

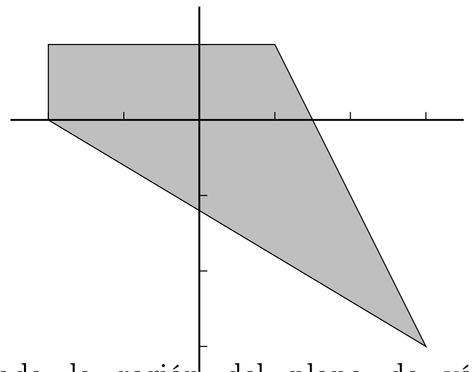
millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

Solución: $x = gr$ de A, $y =$ gr de B , con las siguientes restricciones: $\begin{array}{l} x \leq 2y \\ y - x \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ y > 1 \\ x > 1 \end{array}$
$f(10/3, 5/3) = 10$ millones

23. Un abono para jardines ha de tener como mínimo 15 gr de un componente químico líquido y 15 gr de otro componente sólido por m^2. En el mercado se encuentran dos clases de abono: el tipo A, que contiene 10 % del componente líquido y 50 % del sólido, y el tipo B, que contiene 50 % del componente líquido y 10 % del sólido. El precio del tipo A es de 10 euros y el tipo B es de 30 euros. ¿Qué cantidades han de comprarse de cada tipo para cubrir las necesidades de un jardín de 500 m^2 con un coste mínimo?

Solución: $x = 25$gr/m^2 tipo A, y =$25gr/m^2$ tipo B, 500 m^2, 12500 gr para A, 12500 gr para B

24. Maximizar y minimizar la función $f(x, y) = 5x - 4y$ en la región:



25. Dada la región del plano de vértices $A(3, 2), B(4, 2), C(4, -1)$

a) Hallar el sistema de inecuaciones que la define.

b) Maximizar y minimizar la función $f(x, y) = 6x + 2y$ en esa región.

Solución: El máximo se da en el punto B y vale 28, El mínimo se da en el segmento $\bar{A}C$ y vale 22

Tema 4

FUNCIONES

4.1. Función

Una función transforma números en números,

Dicho con más precisión, una función es una aplicación [1] en la que el conjunto original y el conjunto final están formados por números.

Ejemplo

$$\begin{array}{ll} f: & R \longrightarrow R \\ & x \longrightarrow f(x) = 2x+1 \end{array}$$

Esta función de los números reales en los números reales le asocia a cada número su doble más uno.

En general una función se representa : $y = f(x)$

x es un elemento cualquiera del conjunto original, se llama variable independiente;

y representa su correspondiente imagen en el conjunto final, se llama variable dependiente.

Al conjunto de valores que toma x se le llama **dominio** D , es un subconjunto del conjunto original, si no se especifica, es el mayor posible.

Ejemplos

1. $\begin{array}{lll} f: & [-1,1] & \longrightarrow R \\ & x & \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} \end{array}$, $\quad Dom(f) = [-1,1]$

2. $y = \dfrac{1}{x-2}, \quad Dom(f) = R - 2$

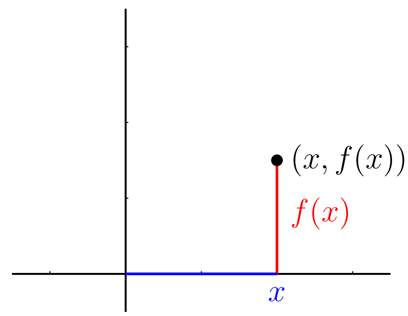
3. $y = \sqrt{x+3}$, ha de ser: $x+3 \geq 0, x \geq -3, \quad Dom(f) = [-3, \infty)$

   Al conjunto de valores que toma la y se le llama rango, recorrido ó imagen, (se deduce de la gráfica).

[1] aplicación quiere decir que un número no puede tener más de una imagen, por ejemplo $y^2 = x$ que equivale a $y = \pm\sqrt{x}$, NO ES FUNCIÓN

4.2. Gráfica de una función

Dada una función $y = f(x)$, los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ representan puntos del plano, el conjunto de ellos es la gráfica de la función.



4.3. Gráfica de una función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 2x - 4 & si \quad -2 < x \leq 1 \\ 2x + 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$$

En las funciones definidas a trozos hay que dar también los valores de x en que cambia de expresión.

El primer trozo es una recta horizontal.

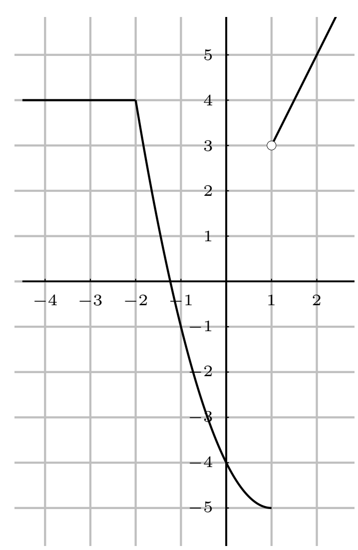
El segundo es una parábola:
$y = x^2 - 2x - 4$
$x^2 - 2x - 4 = 0; x =$ (ejemplo anterior) $\approx \begin{cases} 3'23 \\ -1'23 \end{cases}$

vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

x	y
$3'23$	0
$-1'23$	0
1	-5
-2	4

El tercer trozo $2x + 1$ es una recta:

x	y
1	3
2	5



4.4. Función creciente, decreciente, máximos y mínimos

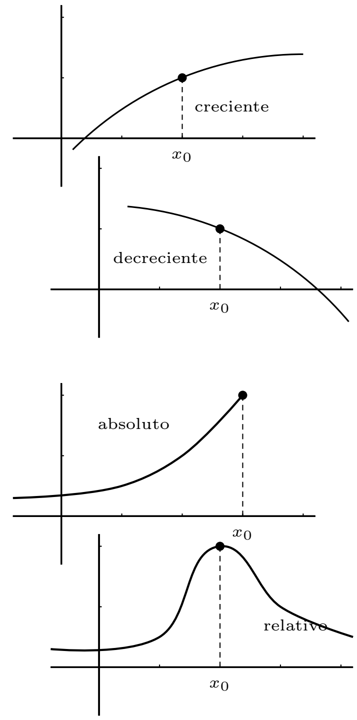
Una función es **creciente** cuando al aumentar la x entonces aumenta la y. Gráfica hacia arriba.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar la x entonces disminuye la y. Gráfica hacia abajo.

Una función tiene un **máximo absoluto** en un punto x_0, si en ese punto toma el mayor valor.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto x_0, si en ese punto toma mayor valor que en los puntos de alrededor.

Análogo sería para **mínimo absoluto** y **mínimo relativo**.

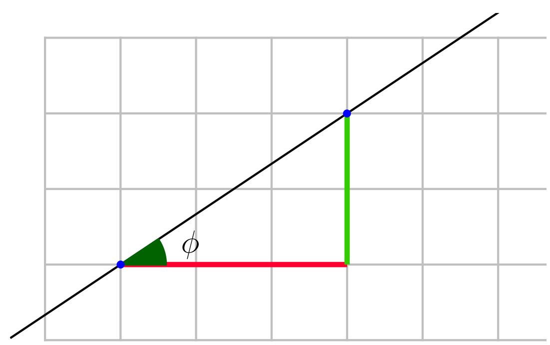


4.5. Pendiente de una recta

La pendiente de una recta mide la inclinación de la recta y viene dada por el cociente entre el desplazamiento vertical partido por el desplazamiento horizontal.

La pendiente se suele representar por la letra m

En el dibujo $m = \dfrac{2}{3}$



Otra forma de dar la inclinación es mediante el ángulo que forma la recta con la horizontal positiva. Este ángulo se suele representar con la letra ϕ

La pendiente m y el ángulo que forma con la horizontal positiva ϕ están relacionados por la expresión:

$$m = \tan \phi$$

La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal positiva.

Ejemplo Hallar la pendiente de la recta que forma con horizontal positiva un ángulo de 35^0.

Usamos la calculadora: $m = \tan 35^0 = 0'70021$

Ejemplo Para hallar el ángulo con horizontal positiva cuando nos dan la pendiente hay que distinguir dos casos según la pendiente sea positiva o negativa:

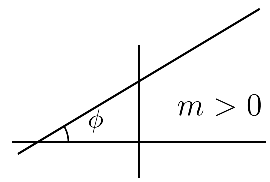
- Hallar el ángulo que forma con horizontal positiva la recta de pendiente $m = 4/7$

  la calculadora da directamente $\phi = ar\tan\dfrac{4}{7} = 29'7448$

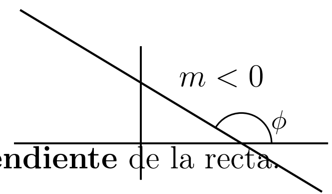
- Hallar el ángulo que forma con horizontal positiva la recta de pendiente $m = -6/5$

  la calculadora da $ar\tan\dfrac{-6}{5} = -50'1944$ entonces hay que restar de 180^0 y se obtiene $\phi = 180 - 50'1944 = 129{,}8056$

Las tangentes de los ángulos agudos son positivas y las de los ángulos obtusos son negativas. Luego por tanto:



- Si la pendiente es positiva la recta es creciente.
- Si la pendiente es negativa la recta es decreciente.



En la ecuación explícita $y = mx + n$, el coeficiente de x **m** es la **pendiente** de la recta.

Por otro lado se tiene que n es la ordenada en el origen.

Dos rectas paralelas tienen igual pendiente.
Resumiendo:

Cuando la y está despejada, el coeficiente de x es la pendiente que es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal positiva.

Ejemplo Hallar la recta paralela a $y = \dfrac{3}{5}x + 2$ que pasa por el punto $(4, 6)$

La recta que busco será $y = \dfrac{3}{5}x + n$

Haciendo que pase por el punto $(4, 6)$ resulta: $6 = \dfrac{3}{5}4 + n, \quad n = \dfrac{18}{5}$, luego la recta paralela buscada es $y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{18}{5}$

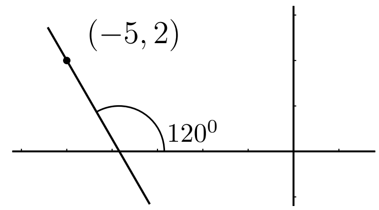
Ejemplo Hallar el ángulo que forma con el eje de las "x"positivas la recta $4x + 7y + 5 = 0$

Despejando y resulta $y = \dfrac{-4}{7}x + \dots$, luego la pendiente es $m = \dfrac{-4}{7} = \tan\phi$, con la calculadora resulta $\phi : ar\tan(\frac{-4}{7}) = -29'7^0$, restando de 180^0 se obtiene $\phi = 180^0 - 29'7^0 = 150'3^0$

También se usa la siguiente ecuación de la recta:

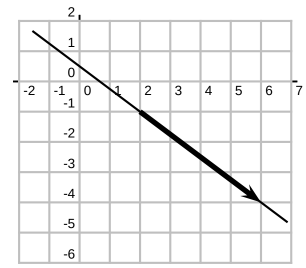
$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ **ecuación punto pendiente**, en la que (x_0, y_0) son las coordenadas de un punto

Ejemplo Hallar la recta que pasa por el punto $(-5,2)$ y forma con el eje de las "x"positivas un ángulo de 120^0.



A partir del dibujo: $m = \tan 120^0 = -1'73$
podemos escribir ya la ecuación punto pendiente:
$y - 2 = -1'73(x + 5)$

Ejemplo Hallar la recta que pasa por el punto $(2,-1)$ y tiene la dirección del vector $(4,-3)$. Escribir sus ecuaciones explícita y general.

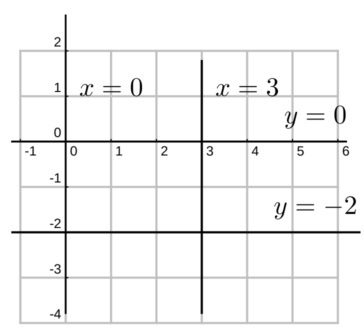


A partir del dibujo: $m = \tan\phi = \dfrac{-3}{4}$
podemos escribir ya la ecuación punto pendiente: $y+1 = \dfrac{-3}{4}(x-2)$
despejando y tenemos la explícita $y = \dfrac{-3}{4}x + \dfrac{1}{2}$

Pasando todo al primer miembro e igualando a 0 tenemos la **ecuación general o implícita de la recta**.

En el ejemplo $3x + 4y - 2 = 0$

Rectas paralelas a los ejes Por su posición especial tienen ecuaciones en las que algún coeficiente es cero y no aparece:

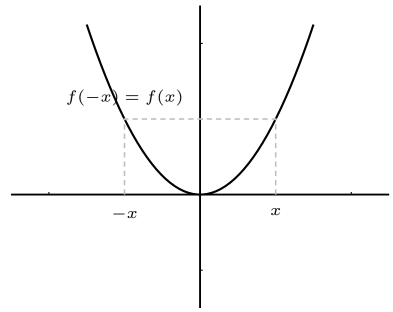


recta vertical: $x = 3$

recta horizontal: $y = -2$

la recta $x = 0$ es el eje de ordenadas.

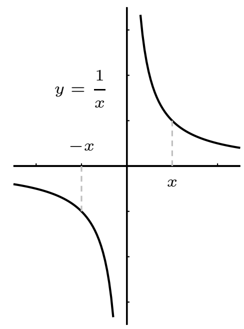
4.6. Función par y función impar



Una función $f(x)$ es **par** cuando $f(-x) = f(x)$.

Ejemplo La función: $y = x^2$
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$; sí es par.
La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Una función $f(x)$ es **impar** cuando $f(-x) = -f(x)$.



Ejemplo $y = \dfrac{1}{x}$
$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$, sí es impar
La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función puede no ser par ni impar.

4.7. Límite de una función

Límite de una función en un punto Trata del valor al que se acercan las imágenes cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor x_0. Lo normal es que las imágenes se acerquen a la imagen de x_0, pero no siempre es así.

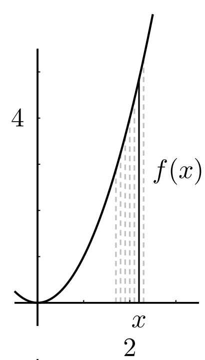
Una función $y = f(x)$ tiene por límite a L cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, entonces la y se acerca a L. Esto se escribe : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

que se lee: "límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es igual a L.

Ejemplos

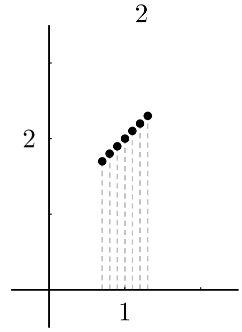
La función $y = x^2$ cuando $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ \hline y & 3'61 & 3'96 & 3'99 \\ x & 2'1 & 2'01 & 2'001 \\ \hline y & 4'41 & 4'04 & 4'004 \end{array} \right\} = 4$$



La función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando $x \to 1$

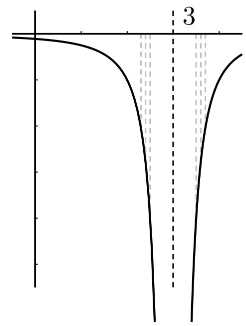
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 0'9 & 0'99 & 0'999 \\ \hline y & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ x & 1'1 & 1'01 & 1'001 \\ \hline y & 2'1 & 2'01 & 2'001 \end{array} \right\} = 2$$

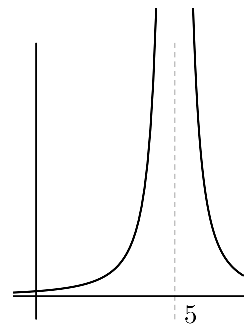


(nota: **asíntota** es una recta a la cual se acerca la función en el infinito).

Una función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, la y se hace enormemente grande, hay asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 2'5 & 2'7 & 2'9 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \\ x & 3'5 & 3'3 & 3'1 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \end{array} \right\} = -\infty$$



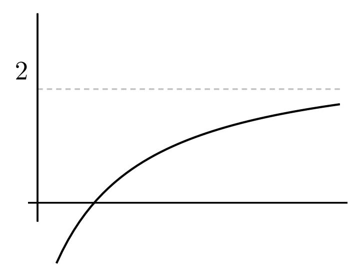


$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$$

Límite cuando x tiende a infinito:

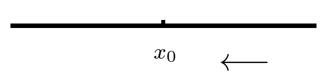
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+7} = 2;$$

si es un número hay asíntota horizontal;
Análogamente: límite cuando x tiende a $-\infty$

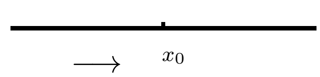


Límites laterales Resultan de acercarse x a x_0 sólo por uno de los lados:

Si nos acercamos con valores mayores que x_0 se llama límite lateral por la derecha y se escribe: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.



Para la izquierda es $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

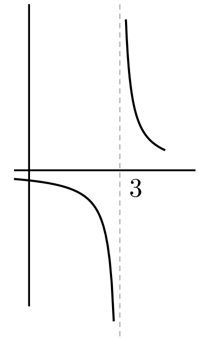


Ejemplos

a) Hallar los límites laterales en $x = 3$ de la función:
$$f(x) = \begin{cases} x^2+5 & si \quad x < 3 \\ x-2 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2+5) = 14$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x-2) = 1$$

b) Hallar los límites laterales en $x = 3$ de la función: $y = \dfrac{1}{x-3}$
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$



Ejercicio Calcular dando valores el límite:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2^x} =$$

4.8. Cálculo de límites de funciones

1^a regla Sustituir la x por el valor al cual se acerca x_0. El número que resulta es el límite (salvo indeterminación). Ejemplos :

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 - 5 = 7; \qquad \lim_{x \to -\infty} 3x^2 - 5 = \infty$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{3x-5x^2}{6x-4} = 0; \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{5x+1} \right)^x = \left\{3^0\right\} = 1$$

2^a regla: Límite de un polinomio partido por otro polinomio

1. Cuando x tiende a infinito: Este límite se calcula a partir de las mayores potencias que dan el orden del infinito.

    a) Cuando el grado del numerador es menor que el del denominador el denominador es más potente, el límite es 0.
    $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-5}{x^2+1} = \text{dividiendo por x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{x+\frac{1}{x}} = 0$$

    b) Cuando el grado del numerador es igual que el del denominador son igualmente potentes, el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado.
    $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-5}{7x^2+x} = \text{dividiendo por } x^2 = \lim_{x \to \infty} \frac{3-\frac{5}{x^2}}{7+\frac{1}{x}} = \frac{3}{7}$$

    c) Cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador el numerador es más potente, el límite es $\pm\infty$. En este caso el signo del infinito se deduce del signo de los coeficientes de mayor grado del numerador y del denominador.
    $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{3x-5} = \text{dividiendo por x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{3-\frac{5}{x}} = \infty$$

2. Cuando x tiende a menos infinito es igual que cuando x tiende a infinito. Sólo hay que preocuparse del signo cuando el límite resulta infinito.

   Ejemplo: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{8x - 1} = -\infty$

3. Cuando x tiende a 0 el límite se calcula sacando factor común y simplificando.

   Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 5x}{3x + 10x^3} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(3x - 5)}{x(3 + 10x^2)} = \dfrac{3x - 5}{3 + 10x^2} = -\dfrac{5}{3}$

   Ejemplo: Si sale infinito, para saber el signo, en este caso hay que hallar los límites laterales.

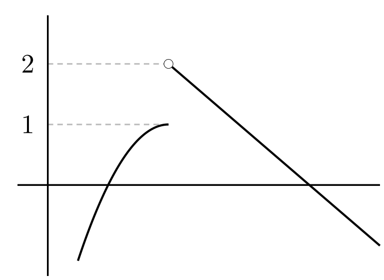
   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 5}{3x + 10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{0}\right\} = \pm\infty$

   $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3x^2 - 5}{3x + 10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{-0}\right\} = \infty;\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x^2 - 5}{3x + 10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{0}\right\} = -\infty$

4. Cuando x tiende a a, siendo a un número distinto de 0, si resulta indeterminación lo resolveremos dividiendo numerador y denominador por $x - a$.

   Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - x^3} = \left\{\dfrac{0}{0} \text{dividimos por } x - 3\right\} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 1}{-x^2} = \dfrac{4}{-9}$

4.9. Continuidad de funciones



Una función es continua cuando su gráfica es continua, no da saltos. Dicho con precisión: una función $f(x)$ es continua en un punto (no aislado) x_0, cuando el límite de la función en x_0 es igual al valor de la función en x_0.

Por ejemplo: $y = x^2$ es continua siempre, en cambio $y = \dfrac{1}{x - 3}$ es discontinua en $x = 3$.

En la práctica para estudiar si una función es continua en un punto se hace el límite por la derecha, el límite por la izquierda y el valor de la función. Es continua si coinciden los tres.

Las discontinuidades que consideramos son: las evitables (falta solo el punto), las de salto finito y las asíntotas verticales.

Ejemplo 1 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & si \quad x < 2 \\ x + 3 & si \quad x > 2 \\ 3 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente

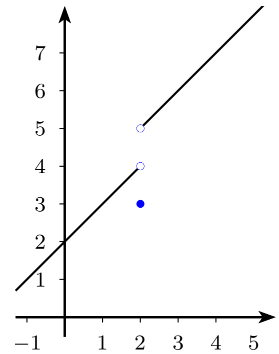
b) Estudiar la continuidad de la función.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x<2 \\ x+3 & si \quad x>2 \\ 3 & si \quad x=2 \end{cases}$$

x	2	0
y	4	2

x	2	4
y	5	7



b) La función es continua siempre salvo en $x=2$ que vamos estudiar:
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+3) = 5$
además $f(2) = 3$
Por tanto la función es discontinua en $x=2$ con salto finito.

Ejemplo 2 Hallar a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+a & si \quad x<2 \\ x+3 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Hallamos los límites laterales en $x=2$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+a) = 4+a$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+3) = 5$
$f(2) = 5$
Para que sea continua han de coincidir: $5 = 4+a; \quad a=1.$
La función es continua si $a=1$

Ejemplo 3 Estudiar la continuidad de la función: $y = \dfrac{4x^2-4x-8}{x^2-4}$

La función, por ser una función racional, es continua siempre excepto en los puntos en los que se anule el denominador, que son $x=\pm 2$

En $x=-2$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{4x^2-4x-8}{x^2-4} = \frac{16}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{4x^2-4x-8}{x^2-4} = \frac{16}{0^-} = -\infty$$
En $x=-2$ hay discontinuidad de salto infinito, asíntota vertical

En $x=2$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{4x^2-4x-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(4x+4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4x+4}{x+2} = 3$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{4x^2-4x-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(4x+4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{4x+4}{x+2} = 3$$
$f(2)$ no existe

En $x = 2$ hay discontinuidad evitable.

Ejemplo 4 Estudiar la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} & si \quad x \leq 0 \\ 2 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2-4x+5 & si \quad x > 1 \end{cases}$

La función, por ser trozos una función racional o polinómica, es continua siempre excepto quizá en los puntos en los que se anule el denominador del primer trozo, que son $x = -2, x = -1$, o en $x = 0, x = 1$ porque cambia de expresión.

En $x = -2$
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$
En $x = -2$ hay discontinuidad de salto infinito, asíntota vertical

En $x = -1$
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-1}{x+2} = -2$
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x-1}{x+2} = -2$
$f(-1)$ no existe
En $x = -1$ hay discontinuidad evitable.

En $x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = -\dfrac{1}{2}$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2 = 2$
$f(0) = -\frac{1}{2}$
En $x = 0$ hay discontinuidad de salto finito.

En $x = 1$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 4x + 5 = 2$
$f(1) = 2$
En $x = 1$ es continua.

Problemas

1. Representar $f(x) = \begin{cases} 3-x & si \quad x \leq 3 \\ 2x-6 & si \quad 3 < x \leq 5 \\ 4-x & si \quad 5 < x \end{cases}$

2. Representar
$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & si \quad x \leq -2 \\ x^2-6 & si \quad -2 < x \leq 4 \\ -x-1 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

3. Se sabe que 210^0F equivalen a 100^0C y que 0^0 equivalen a 32^0F. Hallar las funciones lineales que dan la equivalencia de los distintos tipos de grados.

   Solución: x ^{0}C, y ^{0}F, $y = ax + b, y = \frac{178}{100}x + 32$

4. Suponiendo que en una cabina telefónica los tres primeros minutos de conferencia cuestan 10 céntimos y otras 5 cts. por cada tres minutos más o fracción: a) ¿Cuánto cuesta una conferencia de 7 min.? ¿Y de 8 min. 30 seg.? b) Representar la función que da el importe de la conferencia en función del tiempo. c) ¿Existe su función inversa?. d) Si han cobrado 38 cts. por una conferencia ¿qué puedes decir del tiempo que ha durado?

   Solución:
   $$f(x) = \begin{cases} 10 & si \quad t \in]0,3] \\ 15 & si \quad t \in]3,6] \\ 20 & si \quad t \in]6,9] \\ 25 & si \quad t \in]9,12] \\ \dots \end{cases}, \; f(7) = 20 \text{ cts,}$$
   $f(8'5) = 20$ cts, no hay inversa por no ser inyectiva, ha durado entre 18 y 21 minutos.

5. Dibujar las rectas y hallar su ecuación explícita:

   a) Recta que pasa por el punto $(5, -2)$ y tiene de pendiente $\dfrac{-1}{3}$

   b) Recta que tiene 5 como ordenada en el origen y forma con el eje de las "x" positivas un ángulo de 53^0

   c) Recta que pasa por el punto $(2, -4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{x} = (5, -2)$

   d) Recta $3x - 2y - 15 = 0$

6. Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lador del triángulo de vértices: $(0,0); (1,2); (-3,-1)$

   Solución: $y = \frac{1}{3}x; \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}; \quad y = 2x$

7. Hallar utilizando tabla de valores:

   límite de $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ cuando $x \to -2$

   Solución:
   $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+2} = \left\{ \begin{array}{c|ccccc} x & -1'9 & -1'99 & -1'999 & -2'01 & -2'001 \\ \hline y & -3'9 & -3'99 & -3'999 & -4'01 & -4'001 \end{array} \right\} = -4$$

8. Hallar utilizando tabla de valores:
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x}$$

9. Dada la función $\dfrac{x^2-5x+6x^3}{3x^2-5x-12x^3}$. Hallar:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

   Solución: a) $-1/2$, b) $-1/2$, c) 1

10. Dada la función:
    $$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & si \quad x < 1 \\ 5-x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

    a) Representar gráficamente

    b) Estudiar la continuidad de la función.

11. Hallar a para que la siguiente función sea continua:
    $$f(x) = \begin{cases} 3x-4 & si \quad x < 5 \\ ax+3 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

12. Siendo $f : y = x^2 - 3x$, hallar:
$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$
Solución: 1

13. Hallar la intersección de la parábola $y = (x-3)(x+2)$ y la recta $y = -3x + 2$
Solución: x = - 4, x = 2

14. Hallar la intersección de la parábola $y = 6x^2 - 3x$ y la recta que pasa por los puntos $(2, 0), (-1, 4)$

15. a) Hallar a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & si \quad x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{3x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

b) Hallar $\lim_{x \to \infty} f(x)$

16. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2+x} & si \quad x < 1 \\ x^2 + k & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) Hallar k para que sea continua en $x = 1$

b) Estudiar su continuidad

c) Hallar las asíntotas verticales y horizontales

Tema 5

DERIVADAS

5.1. Derivada de una función en un punto

Sea una función real $f(x)$ definida en el dominio D, subconjunto de R. Se define derivada de la función $f(x)$ en el punto $x_0 \in D$ como:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

cuando este límite es un número.

Ejemplos Veamos si las funciones siguientes son derivables en los puntos que se indican

1. $y = x^2 + 3$ en $x_0 = 5$

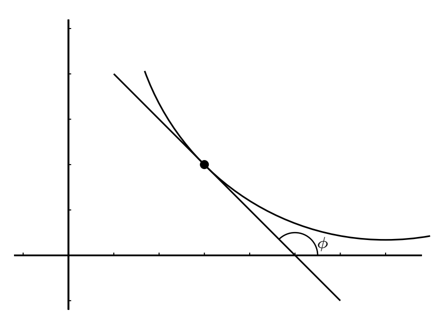
   $$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 + 3 - (5^2+3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = 10$$

2. $y = \dfrac{1}{x+2}$ en $x_0 = 3$

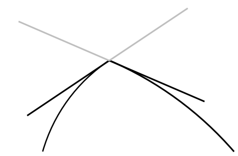
   $$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3+h+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(5+h)5} = \frac{-1}{25}$$

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

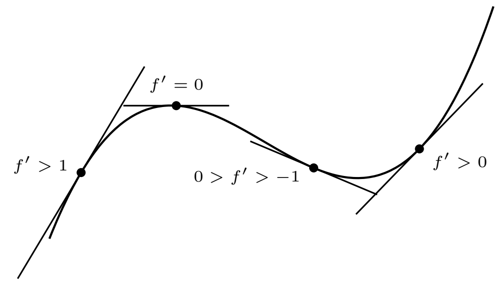
$$f'(x_0) = \tan \phi = m$$



Cuando la función hace un pico quiere decir que la derivada es distinta según nos acerquemos por un lado u otro al punto, entonces se dice que la función no es derivable. Si en un punto no es continua tampoco es derivable. Por tanto la gráfica de una función continua y derivable cambia de dirección suavemente



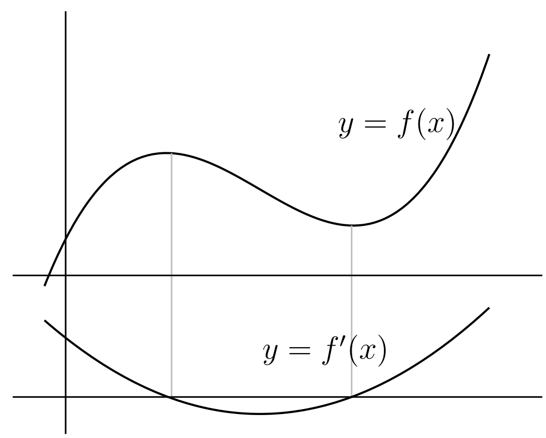
Por tanto la derivada de una función en un punto dice como crece una función y lo hace midiendo la inclinación de la recta tangente pues la derivada es la pendiente de la recta tangente.



Cuanto mayor es la derivada en valor absoluto más vertical es la gráfica. Según sea positiva o negativa sube o baja.

5.2. Función derivada

Si una función $y = f(x)$ definida en un dominio D tiene derivada en cada punto de D resulta una función que se llama función derivada y se representa $y' = f'(x)$
También se representa la función derivada por
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x) = [f(x)]'$



Ejemplo Hallar la derivadas de la función: $y = x^2 + 3$
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 3 - (x^2+3)}{h} = 2x$
$y' = 2x$ es la función derivada de $y = x^2 + 3$

5.3. Cuadro de derivadas

Reglas de derivación:

$(c)' = 0$	la derivada de una constante es 0
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	para derivar una potencia se baja el exponente y se le resta una unidad. En particular: $(x)' = 1$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ la derivada de una raíz es 1 partido por dos veces la raíz; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$
$(f+g)' = f' + g'$	la derivada de la suma es la suma de las derivadas
$(f.g)' = f'g + fg'$	la derivada de un producto es la derivada del 1^0 por el 2^0 más el 1^0 por la derivada del 2^0

$(c.f)' = c.f'$	la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	la derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, partido por el denominador al cuadrado
$(g[f(x)]' = g'[f(x)].f'(x)$	la derivada de la función compuesta, función de función, es la derivada de la exterior en la interior, por la derivada de la interior.

Derivadas de funciones elementales:

Exponencial: $(e^x)' = e^x$ para otra base: $(a^x)' = a^x.La$

Logarítmica: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ para otra base: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$

Ejemplos

1. $y = 3x^4 - 2x; \quad y' = 12x^3 - 2$
2. $y = (x^2 - 3)(2x + 3x^5); \quad y' = 2x(2x + 3x^5) + (x^2 - 3)(2 + 15x^4)$
3. $y = \dfrac{2x - 3x^5}{7x - 5}; \quad y' = \dfrac{(2 - 15x^4)(7x - 5) - (2x - 3x^5)7}{(7x - 5)^2}$
4. $y = \sqrt{x}$; poniendo $y = x^{1/2}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $y = \sqrt[3]{x}$; poniendo: $y = x^{1/3}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
6. $y = \dfrac{5x^4 - 3\sqrt{x}}{1 - x}; \quad y' = \dfrac{(20x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}})(1 - x) - (5x^4 - 3\sqrt{x})(-1)}{(1 - x)^2}$
7. $y = 7\ln(2x - 5); \quad y' = 7\dfrac{2}{2x - 5}$
8. $y = 2e^{x - x^2}; \quad y' = 2(1 - 2x)e^{x - x^2}$
9. $y = (2x^3 + 5x - 2)^4; \quad y' = 4(2x^3 + 5x - 2)^3.(6x^2 + 5)$
10. $y = \sqrt{5x + 1}; \quad y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x + 1}}$
11. Derivar simplificando $y = \dfrac{2x + 1}{(x + 3)^2}; \quad y' = \dfrac{2(x + 3)^2 - (2x + 1)2(x + 3)}{(x + 3)^4} =$

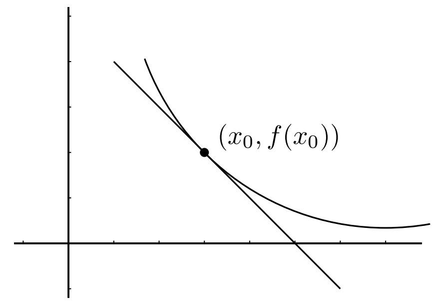
    dividiendo numerador y denominador por $(x + 3)$ $= \dfrac{2x + 6 - 4x - 2}{(x + 3)^3} = \dfrac{-2x + 4}{(x + 3)^3}$

12. Derivar simplificando

$$y=\left(\frac{1-x}{x-1}\right)^3 \quad y'=3\left(\frac{1-x}{x-1}\right)^2.\frac{2-(x-1)-(1-x)}{(x-1)^2}=3\left(\frac{1-x}{x-1}\right)^2.\frac{0}{(x-1)^2}=0$$

Recta tangente a una curva Como la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene de pendiente m es: $y-y_0=m(x-x_0)$, si queremos calcular:

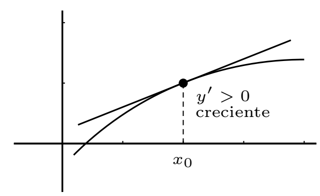
recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0, será: $\begin{cases} y_0=f(x_0) \\ m=f'(x_0) \end{cases}$



5.4. Estudio local de una función

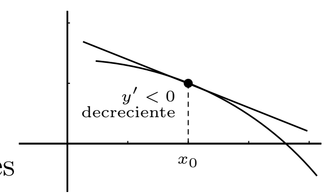
Crecimiento y decrecimiento Consideremos la función $y=f(x)$ en puntos suficientemente próximos a x_0.

Si $f'(x_0)>0$ entonces la pendiente de la recta tangente es positiva luego f es CRECIENTE en x_0.



Si $f'(x_0)<0$ entonces la pendiente de la recta tangente es negativa luego f es DECRECIENTE en x_0

El crecimiento de una función viene dado por el signo de la derivada



Ejemplos Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones

1. $y=4x^3-x^2$

   $y'=12x^2-2x=2x(6x-1)$ que se anula para $x=0, x=1/6$, queremos saber cuando es positiva o negativa y', esos son los los valores que delimitan cambio de signo en la y';

   Probamos por ejemplo los valores de $x: -1, 0'1, 10$

x		0		$\frac{1}{6}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

2. $y=e^{x^2-4x}$

   $y'=e^{x^2-4x}(2x-4)$; la parte exponencial siempre es positiva, la restante se anula para $x=2$

x		2	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

3. $y=\dfrac{(x-3)^2}{1-x^2}$

$$y' = \frac{2(x-3).(1-x^2)-(x-3)^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x^3+6x^2+2x-6+2x^3-12x^2+18x}{(1-x^2)^2} =$$
$$\frac{-6x^2+20x-6}{(1-x^2)^2}$$

queremos saber cuando es positiva o negativa para ello hallamos los valores que delimitan cambio de signo en la y':

Anulamos el numerador:

$-6x^2+20x-6=0$

$6x^2-20x+6=0 \quad x = \dfrac{20 \pm \sqrt{40-144}}{12} = \dfrac{20 \pm \sqrt{256}}{12} = \dfrac{20 \pm 16}{12} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

(el denominador por tener exponente par es siempre positivo)

x		$\frac{1}{3}$		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

4. $y = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

$y' = \dfrac{(x+1)^2-(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4} =$ dividiendo por $x+1$ $= \dfrac{x+1-2(x-1)}{(x+1)^3} = \dfrac{-x+3}{(x+1)^3}$

x		-1		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Método práctico de estudio de puntos críticos o extremos Si $f'(x_0)=0$ entonces en x_0 la tangente es horizontal, luego se tienen las siguientes situaciones:

$y = -(x-1)^2$
$y' = -2(x-1)$

x		1	
y'	$+$		$-$

$f(1)=0$ MAXIMO

$y = (x-1)^3$
$y' = 3(x-1)^2$

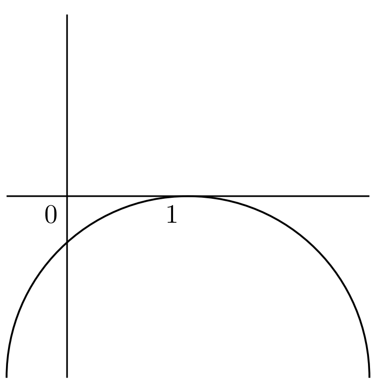
x		1	
y'	$+$		$+$

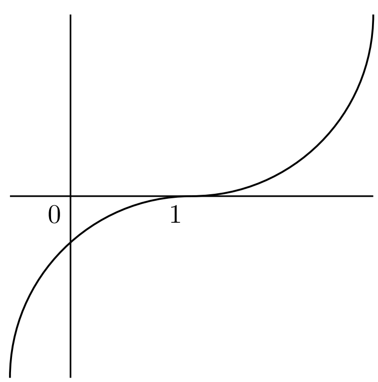
$f'(1)=0$ (este caso se llama inflexión horizontal)

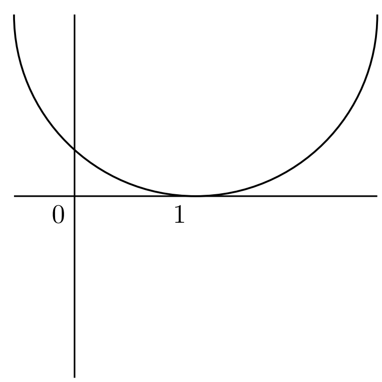
$y = (x-1)^4$
$y' = 4(x-1)^3$

x		1	
y'	$-$		$+$

$f'(1)=0$ MINIMO







5.5. Representación gráfica de funciones

Se consideran los siguientes apartados:

1) Dominio y Puntos de corte .

Dominio es el conjunto de valores de **x** para los que existe la función.

Punto de corte con el eje OY: se hace $x = 0$

Puntos de corte con el eje OX: se hace $y = 0$

2) Asíntotas (rectas tangentes en el infinito)

a) Verticales: valores de x que hacen infinita la y

b) Horizontales: $y = n$; $\quad n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

c) Oblicuas: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}; \quad n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

nota: las oblicuas sólo se estudian si el grado del numerador es uno más que el del denominador.

notas: a) Si hay asíntota horizontal no hay oblicua.

b) Los polinomios no tienen asíntotas.

c) En funciones trascendentes estudiar el límite por los dos lados.

3) Extremos y crecimiento Son los máximos y mínimos. Se estudia la primera derivada.

Ejemplo a) Representar la función polinómica: $y = 12x - x^3$

Como es un polinomio basta con los puntos de corte y el crecimiento

1. Puntos de corte:

con OY : $x = 0$, resulta $y = 0$

con OX : $y = 0$, resulta $x = 0, x = \pm\sqrt{12} = \pm 3'46$

2. Extremos y crecimiento: $y' = 12 - 3x^2$, se anula para $x = -2, x = 2$

x		-2		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Sustituyendo en la función:
$f(-2) = -16, \quad f(2) = 16$

Como ejercicio dibujar la gráfica.

Ejemplo b) Representar la función racional: $y = \dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$

Dominio :

$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Dominio $= R - \{1, 2\}$

Puntos de corte: con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{3}{2}$

con $OX : y = 0$, $x + 3 = 0$, resulta $x = -3$

Asíntotas:

verticales $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

horizontales $n = \lim\limits_{x\to\infty} (fx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2-3x+2} = 0$ asíntota $y = 0$

Extremos y crecimiento:

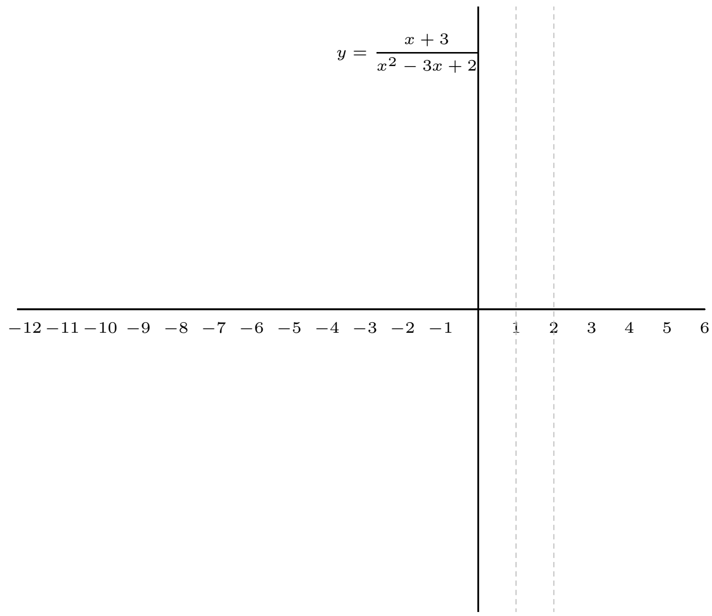
$y' = \dfrac{-x^2-6x+11}{(x^2-3x+2)^2}$

$f'(x) = 0$ para $-x^2 - 6x + 11 = 0$

$x^2 + 6x - 11 = 0 \quad x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+44}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{80}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8'94}{2} = \begin{cases} 1'47 \\ -7'47 \end{cases}$

Probamos por ejemplo el valor de $x = 0$

x		$-7'47$		$1'47$	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		MIN		MAX	



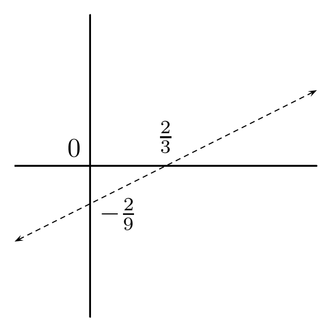
Ejemplo c) Representar la función racional: $y = \dfrac{(x-1)^2}{3x-4}$

Dominio y Puntos de corte: Dominio $= R - \{\dfrac{4}{3}\}$

con $OY : x = 0$, resulta $y = \frac{-1}{4}$

con $OX : y = 0$, resulta $x = 1$

Asíntotas:
verticales $x = 4/3$
horizontal: $n = \lim\limits_{x\to\infty} (fx) = \infty$ no hay
oblicua:
$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x(3x-4)} = \dfrac{1}{3}$
$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{(x-1)^2}{3x-4} - \dfrac{x}{3} \right)$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 + 4x}{(3x-4)3} = \dfrac{-2}{9};$
asíntota oblicua: $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{9}$



nota:

Esperamos que haya pues el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador. Como es una función racional es más fácil dividir polinomios:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 2x + 1 & 3x - 4 \\ \cline{2-2} x^2 + \frac{4}{3}x & \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9} \\ \cline{1-1} \quad \dots & \end{array}$$

Extremos y crecimiento:

$y' = \dfrac{3x^2 - 8x + 5}{(3x-4)^2}$

$f'(x) = 0$ para $x = 1, x = 5/3$

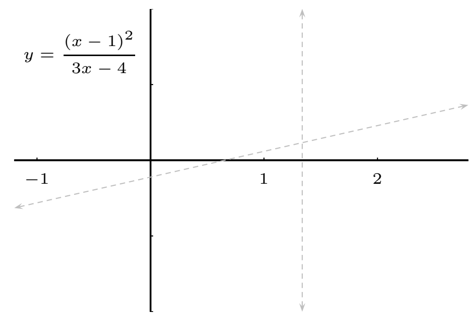
Probamos por ejemplo los valores de $x : 0, 1'1, 10$

x		1		$\frac{5}{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Sustituyendo en la función:

$f(1) = 0, \quad (1, 0)$ MAXIMO

$f(\frac{5}{3}) = \frac{4}{9}, \quad (\frac{5}{3}, \frac{4}{9})$ MINIMO



Observaciones:

1. **Simetrías** (cuando la función es par o impar)

   $f(-x) = \begin{cases} f(x) \text{ función par, simetría respecto eje } OY \\ -f(x) \text{ función impar, simetría respecto origen} \end{cases}$

   si la expresión de $f(x)$ incluye algo del tipo $ax + b$ no hay simetría.

2. Al representar una función $y = f(x)$ no puede haber una vertical que corte a la recta en dos puntos. Ni puntos de corte con asíntotas verticales.

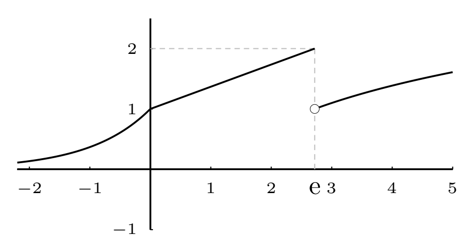
3. En caso de duda en zonas conflictivas se pueden hallar algunos puntos.

4. Las funciones definidas a trozos no se estudian según el procedimiento general, los trozos suelen ser funciones conocidas.

Ejemplo Representar la función siguiente.

$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ 1 + \frac{x}{e} & si \quad 0 < x \leq e \\ \ln x & si \quad e < x \end{cases}$

¿Es continua siempre?. ¿Es derivable siempre?



Observamos que es continua siempre, excepto en $x = e$, donde tiene discontinuidad de salto finito. Es derivable siempre, excepto en $x = e$ por no ser continua, y en $x = 0$, pues al ser punto anguloso las derivadas son distintas por cada lado.

5. Para representar funciones polinómicas suele ser suficiente estudiar: a) Puntos de corte, b) Extremos y crecimiento.

6. Para representar funciones racionales suele convenir estudiar: a) Dominio, b) Puntos de corte, c) Asíntotas, d) Extremos y crecimiento.

5.6. Problemas de máximos y mínimos

1. Hallar un número positivo cuya suma con su recíproco sea mínima.

   número $= x$, suma: $S(x) = x + \dfrac{1}{x}$, en el mínimo la derivada ha de ser 0

   $S'(x) = 1 + \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

   $S'(x) = 0; \quad \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

x		1	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

   el mínimo es para $x = 1$

2. La suma de la base y la altura de un triángulo es 20 cm. ¿Qué longitud ha de tener la base para que el área sea máxima?

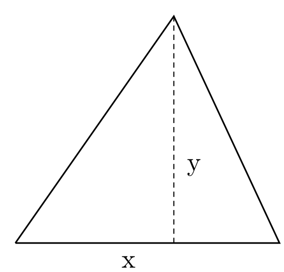
   $S = \dfrac{x.y}{2} =$ máx. $x + y = 20; y = 20 - x$

   sustituyendo: $S(x) = \dfrac{x(20-x)}{2} = \dfrac{1}{2}(20x - x^2)$

   $S'(x) = \dfrac{1}{2}(20 - 2x)$, se anula para $20 - 2x = 0; \quad x = 10;$

x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

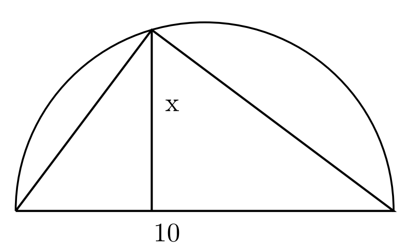
   luego es base $x = 10$ para área máxima.



3. En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un triángulo haciendo coincidir uno de los lados con un diámetro. Hallar el triángulo de área máxima que se puede construir.

   $S(x) = \dfrac{10.x}{2} = 5x \quad S'(x) = 5,$

   S' no se anula nunca, al ser positiva es siempre creciente, x ha de tomar el mayor valor posible que es 5. (máximo absoluto)



4. Hallar el valor de m, n en la siguiente función, sabiendo que $y = mx^3 - nx^2$ tiene un mínimo en $(4, -32)$.

Pasa por $(4, -32)$; sustituyendo queda $-32 = 64m - 16n$; $\quad -2 = 4m - n$

$y' = 3mx^2 - 2nx$; para $x = 4$, $\quad f'(4) = 0$; $\quad 3m{,}16 - 2n{,}4 = 0$; $\quad 6m - n = 0$

resolviendo el sistema: $\begin{cases} -2 = 4m - n \\ 6m - n = 0 \end{cases} \qquad m = 1,\ n = 6$

la función es $y = x^3 - 6x^2$

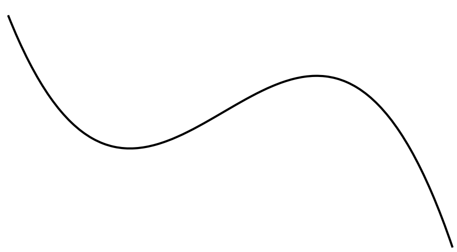
5.7. Problemas

1. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en $x = 3$ de la función $f(x) = 5x^2 - x + 2$.

   Solución: $f'(3) = 29$

2. Hallar la función derivada de la función del problema anterior aplicando la definición. Solución: $f'(x) = 10x - 1$

3. Señalar puntos en la siguiente gráfica de una función en los que la derivada pueda valer aproximadamente: a) -3, b) -1, c) 0, d) 0'5, e) 2, f) 5.



4. La posición de un móvil en función del tiempo es s = 20 + 4t (espacio en metros, tiempo en segundos); calcular utilizando la definición de derivada su velocidad a los 20 segundos, y al cabo de 5 minutos. Hallar la función velocidad instantánea. ¿Qué tipo de movimiento tiene?

   Solución: $s'(20) = 4, s'(300) = 4, s'(t) = 4$, movimiento de velocidad constante uniforme

   En los siguientes el enunciado es çalcular la derivada":

5. Dada la función $y = 4x - x^2$

   a) Hallar la función derivada aplicando la definición.

   b) Hallar la recta tangente en $x = 3$. Representar gráficamente.

   Solución: $y - 3 = -2(x - 3)$

6. $y = 3x^5 - \dfrac{1}{x}$

7. $y = 3\sqrt{x} + \dfrac{4}{x} - 2$

8. $y = (8x^2 + 7x) \cdot \dfrac{1}{x}$

9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

10. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 4} - 2x$

    Solución: $f'(x) = \frac{(4x-3)(x-4)-(2x^2-3x)}{(x-4)^2} - 2$

11. $f(x) = x. \ln(x + 1)$

    Solución: $f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1}$

12. $f(x) = xe^{2x}$

    Solución: $f'(x) = e^{2x} + 2x.e^{2x}$

13. $y = (3e + 5)^{3x-1}$

    Solución: $y' = (3e + 5)^{3x-1},3. \ln(3e + 5)$

14. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x}{x(x^2 + 1)}$

    Solución: $f'(x) = \frac{(8x-5)(x^3+x)-(4x^2-5x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$

15. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{2x^2 - 3}$

    Solución: $f'(x) = \frac{e^{x-1}(2x^2-3)-e^{x-1},4x}{(2x^2-3)^2}$

16. $y = 2x - \dfrac{5}{3x + 1}$

17. $y = \dfrac{3 \ln x}{e^x + x^2}$

    Solución: $f'(x) = \frac{(3\frac{1}{x})(e^x+x^2)-3\ln x(e^x+2x)}{(e^x+x^2)^2}$

18. Derivar y simplificar: $y = \dfrac{5x + 1}{(3x - 15)^2}$

    Solución: $y' = \frac{-15x-81}{(3x-15)^3}$

19. La población de una cierta colonia de insectos crece de acuerdo con la fórmula $y = 1000^{t+1} - 1000(t+1)$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos de la población. Calcular la velocidad de crecimiento de la población a los doce meses.

    Solución: $\approx 6'9{,}10^{39}$

20. Calcular la derivada de $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ simplificando el resultado al máximo.

    Solución: $f'(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$

21. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{2x^3+9}{4x+1}$ en el punto de abcisa 2.

    Solución: $y - \frac{25}{9} = \frac{116}{81}(x-2)$

22. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto de abcisa 2. Representar.

    Solución: $y - 0'69 = \frac{1}{2}(x-2)$

23. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = 5 + \dfrac{3}{x-2}$ en el punto de abcisa 1. Representar.

    Solución: $y + 2 = -3(x-1)$

24. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

    Solución: crece $(-\infty, 0)$; decrece$(0, \infty)$

25. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = 4x^4 - 8x^2$

    Solución: decrece $(-\infty, -1)$; crece $-1, 0)$,decrece $(0, 1)$, crece $(1, \infty)$

26. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

    Solución: decrece $(-\infty, -1)$; crece $-1, 1)$,decrece $(1, \infty)$

27. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{x-3}{x+5}$ y representar.

28. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{3e^{\frac{x}{9}}}{x}$

29. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = 4x^3 - x^4$

30. Dibujar con los puntos de corte y el crecimiento la función: $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

    Solución: Puntos de corte $-3, -1, 2$; $y' = 3x^2 + 4x - 5$ extremos: $-2'11, 0'78$

31. Hallar los coeficientes a, b, c, d de la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que sus extremos locales son los puntos (0,4) y (2,0).

    Solución: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

32. Dibujar y estudiar la continuidad de la función definida por:

    $$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < 2 \\ 2x & si \quad 2 \leq x \end{cases}$$

    Estudiar en qué puntos no es derivable dicha función.

33. Estudiar el crecimiento de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

    Solución: $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $\nearrow (0, e)$; $\searrow (e, \infty)$

34. Dibujar y estudiar la continuidad de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & si \quad 0 < x < 1 \\ \frac{x}{2} & si \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Estudiar en qué puntos no es derivable dicha función.

35. Dibujar y estudiar la continuidad de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{e} & si \quad 0 < x < e \\ \ln x & si \quad e \leq x \end{cases}$$

Estudiar en qué puntos no es derivable dicha función.

36. Descomponer el número a en dos sumandos positivos de manera que su producto sea máximo.

Solución: $x = a/2$

37. Hallar a y b en la función $y = ax^3 - bx$ sabiendo que tiene un máximo en $(1, 8)$.

Solución: $a = -4, b = -12$

38. Descomponer el número 20 en dos sumandos tales que la suma de siete veces el cuadrado del primero más tres veces el cuadrado del segundo sea mínimo.

Solución: 6 y 14

39. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, -2)$ y presenta un máximo relativo cuando $x = \frac{3}{2}$

Solución: $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

40. Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Calcula en qué punto de la gráfica la recta tangente tiene de pendiente 2.

Solución: $(4, -3)$

41. Al vender un producto a un precio x entre 40 y 650 € , el beneficio es $y = -x^2 + 100x - 2100$ € . Obtén razonadamente el precio de x que hace máximo el valor de y.

Solución: 50

42. Con un alambre de 4 metros se quiere construir borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?

43. Descomponer el número 18 como suma de dos números positivos, de manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

44. Halla el área del triángulo rectángulo de área máxima que tenga 10 m de hipotenusa.

Solución: 25 m^2

45. Se desea comprar un terreno rectangular de 400 m^2 de superficie. ¿Cuáles serán las dimensiones más convenientes para que la construcción de la cerca resulte lo más económica posible?

46. De todos los pares x e y de números reales positivos cuya suma sea 30, determina el par (x, y) cuy producto $P = x \cdot y$ es máximo.

Solución: $(15, 15)$

47. Hallar el número positivo que sumado con 25 veces su recíproco da un valor mínimo

Solución: 5

48. Un alambre de 2 m se corta en dos trozos para hacer un cuadrado y una circunferencia. Hallar cuánto mide cada trozo para que el área que encierren sea mínima.

Solución: radio $= 1/(4 + \pi) \approx 0'14$

49. En un campo se quiere limitar una parcela de 24 m^2 por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?

    Solución: 6m de largo por 4m de ancho. La valla de división paralela a los lados cortos.

50. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, ¿Cuál es el de superficie máxima? Solución: un cuadrado de lado 2

51. Hallar la recta que pasa por el punto $(3, 2)$ y forma con la parte positiva de los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

    Solución: $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 3)$

52. La función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene un máximo en $(0, 4)$. hallar la función.

    Solución: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

53. Se quiere construir una caja partiendo de una lámina rectangular de 24 por 32 cm, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando. Determina cuánto hay que cortar para que la caja tenga un volumen máximo.

    Solución: $x = 4'52$

54. Un granjero dispone de 60 m de valla. Con ella, y aprovechando un muro de piedra suficientemente largo que existe en su propiedad, quiere construir un corral rectangular adosado al muro, de la mayor superficie posible: Explíquese cómo debe hacerlo.

    Solución: longitud 30 m, ancho 15 m.

55. Hallar los puntos de la curva $y = 1/(1+x^2)$ en que la recta tangente tiene pendiente máxima y el valor de esta pendiente.

    Solución: $(-1/\sqrt{3}, 3/4), y' = \frac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2}$

56. Hallar una función polinómica de 2^0 grado que tiene un máximo en el punto (1,2) y pasa por el punto $(3, -1)$.

    Solución: $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

57. El coste total de producción de x unidades de un producto es: $C(x) = x2 + 6x + 192$ Se define la función coste medio por unidad como $Cm = \dfrac{C(x)}{x}$. ¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

    Solución: El coste medio por unidad es mínimo si se producen 14 unidades

58. Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono, CO_2, en el aire en partes por millón (ppm), en una ciudad está relacionado con la población p expresada en miles de habitantes, por la siguiente expresión $C(p) = \sqrt{\dfrac{p^2}{2} + 17}$. La evolución del tamaño de población en esta ciudad en t años se estima que está dado por la relación $p(t) = 3'1{,}0'1t^2$ en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en esta ciudad dentro de 3 años?

    Solución: $C'(3) = 0'24$ ppm

59. Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas t que lleva abierto el establecimiento. Se pide:

a) Determinar el número máximo de clientes que van una determinada noche al restaurante. Justificar que es un máximo.

b) Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

Solución: a) $t = 3$ a las 11pm, b) entre las 9 y las 10, ó entre las 12 y la 1

60. En una factoría la función de costes es $C(x) = x^3 - 3\ln x$, donde $x > 0$ es el número de toneladas que se producen.

    a) Calcule el coste mínimo, si existe, y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste.

    b) Si la función de ingresos es $I(x) = x^3 - 12x$ escriba la función de beneficios.

    c) Calcule los intervalos en los que la función de beneficios es creciente o decreciente y diga si existe beneficio máximo y en caso afirmativo el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho beneficio.

    Solución: a) Por tanto, se ha de producir 1 tonelada y el coste es de 1, b)$B(x) = x^3 - 12x - (x^3 - 3\ln x) = -12x + 3\ln x$, c) $B'(x) = 0$ para $x = 1/4$.

61. Tras la ingestión de una bebida alcohólica, la concentración de alcohol en sangre en g/l evoluciona según la función $c(t) = t.e^{1'9-2t}$, donde t es el tiempo en horas transcurrido. Calcula el momento en que se alcanzará la concentración máxima y cuánto valdrá ésta.

    Solución: $t = 1/2$

62. La empresa Autos, S.A. tiene en exclusiva el modelo Turboβ. Cada coche le cuesta a la empresa 1.200.000 pesos y sabe que en un mes puede vender 30 coches a 1.600.000 pesos cada uno. Un estudio e marketing le revela que por cada 20.000 pesos de descuento sobre el precio anterior puede aumentar la venta en 2 coches más al mes. ¿Le conviene hacer estos descuentos para aumentar la venta mensual de coches? ¿A qué precio deberá vender entonces cada automóvil para maximizar los beneficios mensuales?

    Solución: g: ganancia en miles de pesos, x: unidades de descuento de 20.000 c/u;

    $g(x) = \underbrace{-1200(30+2x)}_{coste} + \underbrace{(1600-20x)(30+2x)}_{venta} = -40x^2 + 200x + 12000; g'(x) = 200 - 8x = 0, x = 2'5$, tendría que hacer 2'5 descuentos de 20.000, o sea 50.000, así vendería 5 coches más

63. Hallar una función polinómica de 2^0 grado que tiene un mínimo en el punto (3,-2) y pasa por el punto (1,4).

    Solución: $\frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{23}{2}$

Representar las siguientes gráficas:

64. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2x}{x-3} & si \quad 1 < x \end{cases}$

65. $y = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

66. $y = |x^3 - x|$

67. $y = 4 + 8x - x^2 - 2x^3$

68. $y = \dfrac{x}{4 - x^2}$

69. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

    Solución: $y' = \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

70. $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \leq 1 \\ \ln x & si \quad 1 < x \leq e \\ e^x & si \quad e < x \end{cases}$

71. $y = \dfrac{3x^2 - 12}{x + 5}$

Solución: asíntota $y = 3x - 15, y' = \frac{3x^2+30x+12}{(x+5)^2}, max = -9'55, min = -0'45$

72. $y = 2x + \dfrac{4}{x - 3}$

Solución: $y = \dfrac{2x^2 - 6x - 4}{x - 3}$ asíntota $y = 2x, y' = \frac{2x^2-12x+14}{(x-3)^2}, max = 3 - \sqrt{2} = 1'6, min = 3 + \sqrt{2} = 4,4$

73. $y = 4x^2 - x^4$

74. $y = \dfrac{3e^{\frac{x}{9}}}{x}$

75. $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + 4}$

Solución: $y' = \frac{-x^2-4x+4}{(x^2+4)^2}, x = -2 \pm \sqrt{8}$

76. $y = (x^2 + 9)(1 - x)$

77. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

Solución: $y' = \frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$

78. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

Solución: $y' = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$

79. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

Solución: $y' = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$

80. $y = 2e^x - 3$

81. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

82. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

83. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

84. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 5}$

Solución: $y' = \frac{x^2-10x+5}{(x^2-5)^2}$, $x = 5 \pm 2\sqrt{5}$

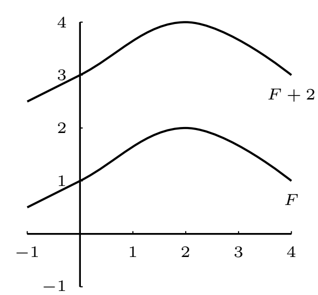
85. $y = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$

Tema 6

INTEGRALES

6.1. Primitiva de una función

Integrar es lo contrario de derivar, $2x$ es la derivada de x^2, el proceso contrario es:
$\displaystyle\int 2xdx = x^2 + C$, que se lee:
"la integral de 2x diferencial de x es x^2 más C",
(C es una constante cualquiera), a la integral se le llama primitiva.



En general:
Sea f una función, la función F se dice primitiva de f cuando la derivada de F es f; es decir $F' = f$. Por tanto:
"F primitiva de f"equivale a "f es derivada de F"
Por ejemplo: dada la función $2x$ una primitiva de ella es x^2, también es primitiva de ella $x^2 + 5$.
Luego, dada una primitiva cualquiera, sumándole cualquier constante se obtiene otra primitiva, se escribe:
$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$

Razonando con las derivadas de x^n, e^x, $\ln x$, se hacen los siguientes ejemplos

Ejemplos

1. $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2. $\displaystyle\int 7dx = 7x + C$

3. $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C;$

   en general para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4. $\displaystyle\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x} + C$

7. $\displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

8. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

Consideraremos los siguientes tipos de integrales :

$\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$ "potencial"

para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente.

$\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ "logarítmica"

$\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$ "exponencial"

Propiedades Se deducen de las mismas propiedades de la derivadas.

1. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$; la integral de la suma es igual a la suma de las integrales, es decir para integrar una suma se va integrando cada sumando.

   Ejemplo $\displaystyle\int \left(x^4 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \ln|x| + C$

2. $\displaystyle\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$; la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función, es decir los números pueden entrar o salir en el signo integral.

   Ejemplo $\displaystyle\int \frac{e^x}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^x dx = \frac{1}{2} e^x + C$

Ejemplos

1. $\int (3x^2 - 8x + 1)dx = x^3 - 4x^2 + x + C$

2. $\int \frac{3}{x^2}dx = 3\int x^{-2}dx = 3\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-3}{x} + C$

3. $\int (5x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 5\int x^3dx + 2\int x^{1/2}dx - \int x^{-1/2}dx = 5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$

4. Hallar la función que pasa por el punto $(0,7)$ y tiene como derivada $f'(x) = 3x^2 - 5x + 1$

   Integrando la derivada:

   $f(x) = \int (3x^2 - 5x + 1)dx = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + C.$

   Para hallar C hacemos que pase por $(0,7)$: $\quad f(0) = 7; \quad C = 7.$

   La función es: $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 7$

5. Hallar la función que pasa por el origen y por el punto $(2,8)$ y tiene como derivada segunda $f''(x) = x^2$

   Tenemos que integrar dos veces:

   $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$

   $\int \left(\frac{x^3}{3} + C\right) dx = \frac{x^4}{12} + Cx + D$

   $f(x) = \frac{x^4}{12} + Cx + D$, hacemos que pase por $(0,0)$ y resulta $D = 0$, hacemos que pase por $(2,8)$ y resulta:

   $f(2) = \frac{2^4}{12} + 2C = 8; \quad 8 = \frac{4}{3} + 2C; \quad C = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ Resulta: $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{10x}{3}$

6.2. Integración de funciones compuestas

Cuando hay función de función tenemos:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$ "potencial"	$\int f'(x).[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$ "logarítmica"	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + C$ "Si arriba está la derivada de lo de abajo la integral es el logaritmo de lo de abajo"

$\int e^x dx = e^x + C$ "exponencial" $\qquad \int f'(x).e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$

Es decir:

al derivar aparece la derivada de lo de dentro

al integrar **desaparece** la derivada de lo de dentro.

Ejemplos

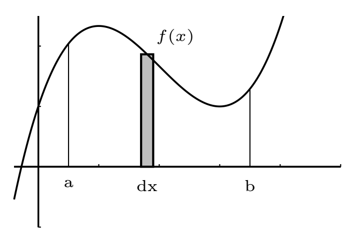
1. $\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln |3x+1| + C$

2. $\int (5x-2)^3 dx = \frac{1}{5} \int 5(5x-2)^3 dx = \frac{1}{5} \frac{(5x-2)^4}{4} + C$

3. $\int e^{8x+2} dx = \frac{1}{8} \int 8e^{8x+2} dx = \frac{1}{8} e^{8x+2} + C$

4. $\int x.e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x.e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

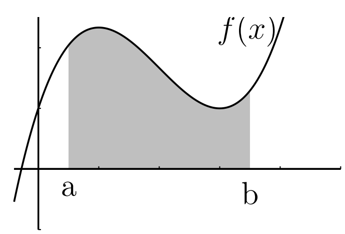
6.3. Noción de integral definida



La integral definida entre a y b de $f(x)$: $\int_a^b f(x)dx$ es la suma de las áreas de los elementos rectangulares de base "dx" y altura "$f(x)$"

a, b se llaman límites de integración.

Gráficamente la integral es el área limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre las abcisas a y b, (salvo el signo pues $f(x)$ puede ser negativa).

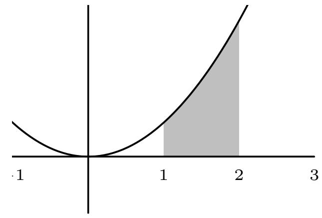


La Regla de Barrow permite hallar el valor de las integrales definidas:

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$, con $F(x)$ primitiva de $f(x)$

Ejemplos

1. $\int_1^2 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$



2. $\int_2^4 (x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_2^4 = (\frac{4^3}{3} - 4) - (\frac{2^3}{3} - 2) = \frac{64}{3} - 4 - (\frac{8}{3} - 2) = \frac{52}{3} - \frac{2}{3} = \frac{50}{3}$

3. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2x+1}dx$

   Hallamos primero la primitiva:

   $\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

   Entonces:

   $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2x+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\ln|2(-1)+1| - \ln|2(-2)+1|\right) =$

   $\frac{1}{2}\left(\ln|-1| - \ln|-3|\right) = \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 3) = \frac{1}{2}(-1'098) = -0'549$

6.4. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas

a) **Área encerrada entre la curva y el eje OX:**

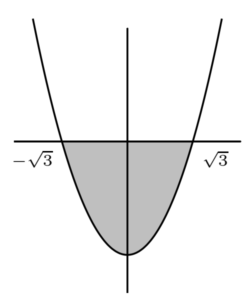
Es necesario conocer el comportamiento del signo de la función en el intervalo de integración.

Ejemplos

1. Hallar el área encerrada por $y = x^2 - 3$ y el eje de abcisas

   $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} \quad S = 4\sqrt{3}\ u^2$

   también, como es simétrica podíamos haber hallado $S = 2.S_1$ con S_1 área entre 0 y $\sqrt{3}$.



2. Hallar el área encerrada por $y = 2x - x^2$, el eje de abcisas y las rectas $x = 0, x = 3$.

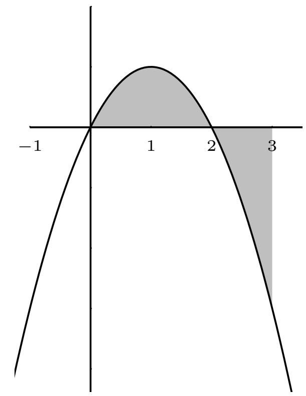
$S = S_1 + S_2$

$S_1 = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{4}{3}$

$S_2 : \int_2^3 (2x - x^2)xdx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 3^2 - \frac{3^3}{3} - (2^2 - \frac{2^3}{3}) = -\frac{4}{3},$

luego $S_2 = \frac{4}{3}$. Resultando

$$S = \frac{8}{3}\ u^2$$



3. Hallar el área que encierra con el eje de abcisas entre -4 y e, la función

$f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x \le -2 \\ x^2 - 1 & si \quad -2 < x \le 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

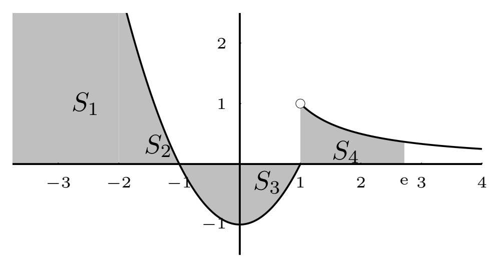
$S_1 =$ base . altura $= 2 \cdot 3 = 6$

$S_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = \frac{4}{3}$

$S_3 : \int_0^1 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = -\frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{4}{3}$

$S_4 = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

$S = 6 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{29}{3}\ u^2$



b) Área encerrada por dos curvas:

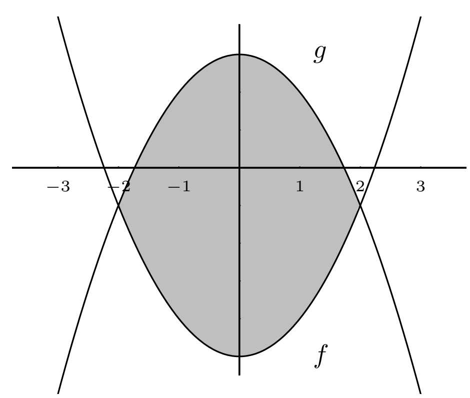
Sean f y g las curvas: si $f \ge g$ en el intervalo de integración, entonces el área viene dada directamente por la integral de $f - g$.

4. Hallar el área limitada por $f : y = x^2 - 5, \quad g : y = 3 - x^2$

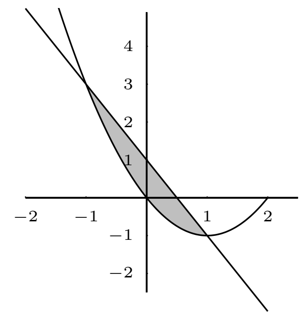
los puntos de corte corresponden a las abcisas ± 2, y $g \ge f$

$S = 2S_1 = 2\int_0^2 g - f$

$S = 2\int_0^2 [3 - x^2 - (x^2 - 5)]dx = 2\int_0^2 (8 - 2x^2)dx = \frac{64}{3}\ u^2$



5. Área encerrada por $y = x^2 - 2x$; y la recta que pasa por los puntos $(1, -1), (-2, 5)$



Recta: $y = ax + b$ $\left.\begin{array}{ll} f(1) = -1, & a + b = -1 \\ f(-2) = 5, & -2a + b = 5 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema resulta $a = -2, b = 1$

La recta es: $y = -2x + 1$

los puntos de corte con la parábola son: $(1, -1), (-1, 3)$; llamamos: recta $g(y)$, parábola $f(y)$

$$S = \int_{-1}^{1} g - f = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\ u^2$$

6.5. Problemas

El enunciado es ”Calcular la integral”

1. $\int(x^2 - x + 1)dx$

   Solución: $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$

2. $\int(4x^3 - 5x^2)dx$

   Solución: $x^4 - 5\frac{x^3}{3} + C$

3. $\int(7e^x + \frac{9}{x^2})dx$

   Solución: $7e^x - \frac{9}{x} + C$

4. $\int(3x^2 + 5\sqrt{x} - 3x + 1)dx$

   Solución: $x^3 + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{3x^2}{2} + x + C$

5. $\int(\frac{3}{x} - 5)dx$

   Solución: $3\ln|x| - 5x + C$

6. $\int(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \sqrt{2x})dx$

   Solución: $2\ln|x| - \frac{3}{x} + \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}} + C$

7. Hallar la ecuación de la curva que pasa por los puntos p(0,3) y Q(-1,4), sabiendo que su derivada segunda es $y'' = 6x - 2$

   Solución: $y = x^3 - x^2 - 3x + 3$

El enunciado es ”Calcular la integral”

8. $\int(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})dx$

   Solución: $\frac{-1}{x} - \ln|x| + C$

9. $\int(x^2 + \frac{1}{x})dx$

   Solución: $\frac{x^3}{3} + \ln|x| + C$

10. $\int e^{-2x}dx$

    Solución: $\frac{-e^{-2x}}{2} + C$

11. $\int(3e^x - 1)dx$

    Solución: $3e^x - x + C$

12. $\int\frac{x+1}{2}dx$

    Solución: $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}C$

13. $\int(x+1)^2dx$

    Solución: $\frac{(x+1)^3}{3} + C$

14. Derivar $y = (x^2 - 5x + 1)^3$ y luego expresar la primitiva de la derivada obtenida.

    Solución: $y' = 3(x^2 - 5x + 1)^2(2x + 5), prim = (x^2 - 5x + 1)^3 + C$

15. Hallar la función $f(x)$ que pasa por el punto $(2, 5)$ y cuya pendiente tiene de expresión $\frac{1}{x-3}$ para cada valor de x.

    Solución: $f(x) = \ln|x - 3| + 5$

Calcular las integrales

16. $\int(\frac{8}{x} - \frac{5}{x^2})dx$

    Solución: $8\ln|x| + \frac{5}{x} + C$

17. $\int(\frac{2}{x^2} + e^x)dx$

    Solución: $\frac{-2}{x} + e^x + C$

18. $\int e^{5x}dx$

    Solución: $\frac{1}{5}e^{5x} + C$

19. $\int(x^2 + 1)2xdx$

    Solución: $\frac{(x^2+1)^2}{2} + C$

20. $\int\frac{x}{3x^2+1}dx$

21. $\int e^{2x-6}dx$

    Solución: $\frac{1}{2}e^{2x+6} + C$

22. $\int x.e^{x^2}dx$

Solución: $\frac{e^{x^2}}{2}+C$

23. $\int \frac{dx}{e^x}$

Solución: $-e^{-x}+C$

24. $\int \frac{x}{4+x^2}dx$

Solución: $\frac{1}{2}\ln|4+x^2|+C$

25. $\int \frac{dx}{4-x}$

Solución: $-\ln|4-x|$ + C

26. $\int \frac{x}{x^2-24}dx$

Solución: $\frac{1}{2}.\ln|x^2-24|+C$

27. $\int (4x-5)dx$

Solución: $2x^2-5x+C$

28. $\int e^{3x-3}dx$

Solución: $\frac{1}{3}e^{3x-3}+C$

29. $\int \frac{dx}{3x+5}$

Solución: $\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$

30. $\int_{-1}^{3}(x^2+1)dx$

Solución: $\frac{40}{3}$

31. $\int_{-2}^{-1}(x-1-\frac{1}{x})dx$

Solución: $\frac{-5}{2}+\ln 2=1'81$

32. $\int_{1}^{3}\frac{2dx}{3x+1}$

Solución: $\frac{2}{3}(\ln 10-\ln 4)$

33. $\int_{0}^{2}e^{2x+1}dx$

Solución: $\frac{1}{2}(e^5-e)$

34. Calcular $\int_{-1}^{1}f(x)dx$, siendo: $f(x)=3-2x-\frac{1}{x-2}$. ¿Es el área que encierra con el eje de abcisas entre $x=-1$ y $x=1$?

Solución: $7'09$

35. Hallar el área comprendida entre la curva $y=x^3-6x^2$ y el eje OX.

Solución: 108 u^2

36. Hallar el área comprendida entre el eje de abcisas y la función $y=(x-2)(x+1)$ entre $x=3$ y $x=5$

Solución: 20'6 u^2

37. Determinar el área limitada por la parábola $y=x^2-5$ y la recta que pasa por los puntos (0,3) (1,5).

Solución: 36 u^2

38. Calcular el área de la región del plano delimitada por $y=x^2-x$ y por $y=1-x$.

Solución: 4/3

39. Área comprendida entre $y=2$, $y=x^3-x+2$

Solución: $1/2$ u^2

40. Hallar el área encerrada entre $y=x(x-1)(x+2)$ y el eje de abcisas

Solución: $S=8/3+5/12=37/12$ u^2

41. Hallar el área encerrada entre $y=x^2-x$ y el eje OX entre $x=0$, $x=2$

Solución: $S=1$ u^2

42. Hallar el área que encierra con el eje de abcisas entre -2 y 2, la función

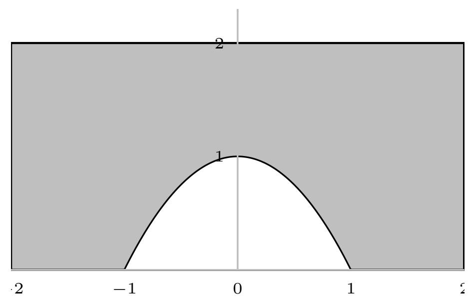
$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x\le -1 \\ 1+x^2 & si \quad -1<x\le 0 \\ e^x & si \quad x>0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{7}{3}+e^2$ u^2

43. Hallar el área que encierra con el eje de abcisas la función $y = \frac{1}{x}$ entre $x = 1$ y $x = e$.

    Solución: 1 u^2

44. Calcular el área de la región rayada si la figura curva es la parábola $y = 1 - x^2$



    Solución: 20/3

45. Hallar el área que encierra con OX entre $x = 1$ y $x = 3$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 12 & si \quad x \le 1 \\ -18x + 8 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

    Solución: $238/3 = 79'3$

46. Hallar el área encerrada por la curva $y = x^3 - 3x$ y el eje de abcisas.

    Solución: 9/2

47. Área comprendida entre $y = 2x^3$, $y = 4x$

    Solución: 4 u^2

48. Hallar el área encerrada por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta $y = x + 4$

    Solución: 9/2

49. Hallar el área encerrada entre las curvas $y = x^2 - x, \quad y = 3x - x^2$

    Solución: 8/3

50. Hallar el área encerrada entre:
    $y = 2x + \dfrac{6}{5 - x}$ y la recta que pasa por los puntos $(2, 6); (3, 9)$

    Solución: $y = 3x$; $\int_2^3 (x - \dfrac{6}{5-x} dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + 6\ln|5-x|\right]_2^3 = -6\ln 3 + 6\ln 2 + 5/2 = 0'07$

51. Calcular y representar gráficamente:
    $$\int_1^3 \frac{6x - 2}{1 + 3x} dx$$

    Solución: $2'78 \quad u^2$

52. Hallar el área encerrada por la parábola $y = 9x - 3x^2$ y la recta $y = -6x$

    Solución: 125/2

53. Dada la función $y = 3x^2 + a$, sabiendo que $a > 2$. Hallar a de modo que el área que encierra con las rectas $x = 1, \quad x = 3, \quad y = 2$ vale 28 u^2

    Solución: $a = 3$

54. Hallar el área encerrada entre las gráficas de las funciones $y = x^2 + 4x + 5, \quad y = 5$

    Solución: entre $-4y0, S = 32/3$

55. Hallar a para que la integral $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + a\right) dx$ valga $-\dfrac{13}{24}$

    Solución: $a = -1$

56. Hallar el área encerrada por la parábola $y = (x + 3)(2 - x)$ y la recta $x - 2y = 2$

    Solución: $27'72$

57. Hallar el área encerrada por la parábola $y = 4x - x^2$ y la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(2, 4)$

    Solución: 1/6

58. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} ax-1 & si \quad x \leq 1 \\ 3x-x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

    a) Hallar a sabiendo que es continua.

    b) Hallar el área que encierra con el eje de abcisas.

    Solución: $a = 3$; $S = 4\,u^2$

59. Hallar el área encerrada por la parábola $y^2 = x$, el eje de ordenadas y la tangente a la parábola en $(1, 1)$

    Solución: $1/12$

60. Las pérdidas o ganancias de una empresa siguen la ley $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+2}$ siendo x los años de vida de la empresa y $f(x)$ las pérdidas o ganancias en millones de rupias.

    a) Determinar el año en que la empresa deja de tener pérdidas.

    b) ¿Pueden ser 3 millones de rupias sus beneficios en algún momento?

    c) ¿A cuánto asciendes las pérdidas o beneficios acumulados en los dos primeros años?

    Solución: a) $x = 2$, b) no, c) $-1'55$ millones

61. Hallar el área encerrada por la parábola $f(x) = -2\,x^2 - 4\,x + 4$ y su derivada.

    Solución: 21,33

62. A las 9 de la mañana surge un rumor en Villachismosa que se difunde a un ritmo de $f(t) = e^{2t} + 1000$ personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor. Calcula el número de personas que lo habrán oído entre las diez y las 12 de la mañana.

    Solución: $2198'2$

63. Hallar el área encerrada por la parábola $y = (x+3)(2-x)$ y la recta $x - 2y = 2$

    Solución: $-\frac{1331}{48} = -27'72$

64. Hallar el área que encierra con los ejes la hipérbola: $y = \dfrac{2\,x+4}{2\,x+5}$

    Solución: área $= 1'2$

65. Dada la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -x + 6$

    a) Hallar el área que encierran las dos.

    b) Hallar el área que encierran las dos y las rectas $x = -2, \quad x = 1$

    c) Hallar el área del triángulo mixtilineo que delimitan en el primer cuadrante la parábola, la recta y el eje OX.

Tema 7

PROBABILIDAD

7.1. Introducción

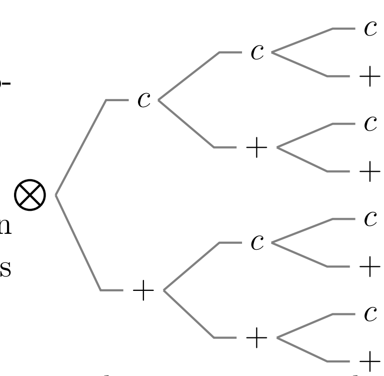
Fenómeno aleatorio es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

Cálculo de probabilidades es el modelo teórico de las regularidades que se observan en los resultados de los fenómenos aleatorios cuando crece el número de pruebas.

7.2. Sucesos

El conjunto de todos los resultados asociados a un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se suele representar por E

Ejemplo Escribir el espacio muestral del lanzamiento de una moneda tres veces a) por extensión, b) mediante diagrama en árbol.
a) $E = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$



Suceso es todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento lanzar un dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, son sucesos "salir par", "salir menos de 3".

Se dice que un suceso se ha verificado cuando al realizar la experiencia aleatoria correspondiente, el resultado es uno de los elementos de ese suceso. Si al tirar el dado sale un 6 se han verificado, entre otros, los sucesos $\{6\}, \{salir\ par\}, \{5, 6\}, E$.

Los sucesos formados por un solo elemento se llaman **sucesos elementales**, por ejemplo $\{6\}$. El espacio muestral se llama también **suceso seguro**, el suceso $\emptyset$ se llama suceso imposible.

Hemos considerado los sucesos como conjuntos, por tanto hablaremos de:

inclusión $\subset$: $A \subset B$ (se lee A contenido en B), si todos los elementos de A están en B
unión $\cup$: $A \cup B$ se forma juntando los elementos de A y de B
intersección $\cap$: $A \cap B$ está formado por los elementos comunes a los dos
complementario $\bar{A}$: los elementos restantes que no están en A.

Existen también denominaciones propias del lenguaje de sucesos:
$A \subset B$ es $A \Longrightarrow B$ (se lee A implica B), la verificación del suceso A implica la del suceso B; ej $A =$ salir múltiplo de 3, $B =$ salir más de 2.
$A \cup B$ se verifica el suceso A **o** el suceso B, se verifica **al menos** uno de los dos
$A \cap B$ se verifica el suceso A **y** el suceso B
El complementario $\bar{A}$ del suceso A se llama suceso **contrario**.
Dos sucesos disjuntos, sin ningún elemento común: $A \cap B = \emptyset$ se llaman **incompatibles**.

7.3. Frecuencia de un suceso

Prueba es cada realización de un experimento aleatorio. Sea un experimento aleatorio del que se han realizado N pruebas. Si el suceso A aparece n veces se dice que en la referida muestra de N pruebas la frecuencia relativa del suceso A es $fr(A) = \frac{n}{N}$.

Observamos que: (podemos pensar en el lanzamiento 20 veces de un dado: $A =$salir par)
1) La frecuencia relativa de un suceso está comprendida entre 0 y 1.
2) La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.
3) La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de las respectivas frecuencias: si$A \cap B = \emptyset$, $\quad fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$

Por otro lado si por ejemplo se lanza una moneda 50 veces y salen 28 caras, no tiene por qué ocurrir que al repetir las 50 tiradas vuelvan a salir 28 caras, o sea, las frecuencias relativas suelen variar en cada serie de pruebas.

No obstante al aumentar el número de pruebas se tiene el siguiente resultado práctico llamado **ley del azar** : las frecuencias relativas de los sucesos tienden a estabilizarse alrededor de ciertos números, a estos números se les suele llamar probabilidad de los respectivos sucesos.

7.4. Probabilidad

Es el modelo teórico de las frecuencias relativas. Por tanto la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 y cumple las condiciones:
1) $p(E) = 1$, la probabilidad del suceso seguro es 1.
2) dados A, B sucesos incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, es decir la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades.

Probabilidad de **Laplace** es la que asigna a cada suceso elemental la misma probabilidad, por tanto la probabilidad de un suceso elemental es $\frac{1}{N}$ siendo N el número de sucesos elementales.

Entonces si el suceso A es la unión de n sucesos elementales tendremos:

$p(A) = \dfrac{n}{N}$ o en otras palabras $p(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

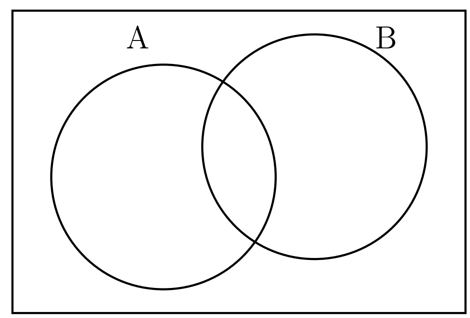
Por ejemplo en la extracción de una carta de una baraja española, la probabilidad de que salga un basto es $p(B) = \dfrac{10}{40}$

Probabilidad **estimada**, empírica o a posteriori de un suceso es la frecuencia relativa de la aparición del suceso cuando el número de observaciones es muy grande.

Por ejemplo a la vista de la producción de un gran número de piezas, una fábrica encuentra que el 20 % de los cerrojos producidos por una determinada máquina son defectuosos para unos ciertos requerimientos. Parece lógico asignar una probabilidad 0'2 de obtener un cerrojo defectuoso.

Propiedades de una probabilidad:

Las demostraciones se deducen de las condiciones de la definición de probabilidad.



1. La probabilidad del suceso imposible es 0:
$$p(\emptyset) = 0,$$
2. Para el suceso complementario se cumple:
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
3. Para la unión de dos sucesos cualesquiera se tiene:
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Ejemplos

1. Hallar la probabilidad de que salga bastos o figura al sacar una carta de una baraja española (40 cartas).

   $A =$ salir bastos, $p(A) = \dfrac{10}{40}$

   $B =$ salir figura (sota, caballo, rey), $p(B) = \dfrac{12}{40}$

   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{10}{40} + \dfrac{12}{40} - \dfrac{3}{40} = \dfrac{19}{40}$

2. Un dado ha sido manipulado de manera que la probabilidad de obtener un número es proporcional al mismo. Hallar la probabilidad de que se obtenga un número par al lanzarlo una vez.

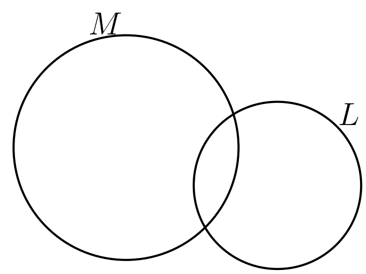
   Repartir proporcionalmente al número de la cara:

1
2
3
4 Hay que repartir toda la probabilidad, o sea, 1 entre 21: $\dfrac{1}{21}$
5
6
suma 21

$p(1) = 1 \cdot \frac{1}{21}$
$p(2) = 2 \cdot \frac{1}{21}$
$p(3) = 3 \cdot \frac{1}{21}$
$p(4) = 4 \cdot \frac{1}{21}$
$p(5) = 5 \cdot \frac{1}{21}$
$p(6) = 6 \cdot \frac{1}{21}$

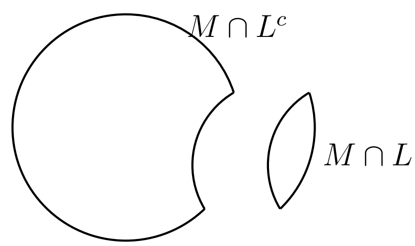
$p\{\text{ par }\} = p\{2\} + p\{4\} + p\{6\} = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{12}{21}$

3. La probabilidad de que un alumno apruebe Matemáticas es $0'6$ y la de que apruebe Lengua es $0'5$ y la de que apruebe las dos es $0'2$.



a) Hallar la probabilidad de que apruebe alguna (es decir, al menos una).
b) Hallar la probabilidad de que no apruebe ninguna.
c) Hallar la probabilidad de que apruebe Matemáticas y no Lengua.

a) $p(M \cup L) = p(M) + p(L) - p(M \cap L) = 0'6 + 0'5 - 0'2 = 0'9$
b) $p[(M \cup L)^c] = 1 - 0'9 = 0'1$
c) $M = (M \cap L^c) \cup (M \cap L)$ disjunta; $p(M \cap L^c) = p(M) - p(M \cap L) = 0'6 - 0'2 = 0'4$



4. Una urna contiene 25 bolas blancas de madera, 36 blancas de cristal, 39 bolas rojas en total, y 32 de madera en total.

a) Hallar el número total de bolas.

Si se elige al azar una bola:

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja y de madera?.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca o de cristal?.

a) Completamos el cuadro:

	rojas	blancas	
madera	7	25	32
cristal	32	36	68
	39	61	100

Consideremos los sucesos B = extraer bola blanca, M = extraer bola de madera, R = extraer bola roja. Entonces:

b) $p(B) = 61/100 = 0'61$

c) $p(R \cap M) = 7/100 = 0'07$

d) $p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0'93$

7.5. Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo Una caja contiene 10 piezas, de las cuales 4 son defectuosas.

I) Hallar la probabilidad de extraer dos defectuosas consecutivas

a) sin devolver la primera.

b) devolviendo la primera.

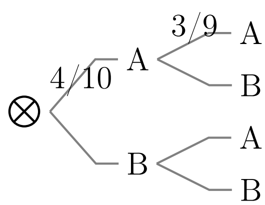
II) Sin devolver la primera, hallar la probabilidad de obtener una de cada tipo.

A = extraer pieza defectuosa ; B = extraer pieza no defectuosa

I) Para hallar la probabilidad de una rama se multiplican las probabilidades de la rama:

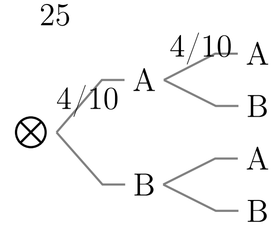
a) Sin devolución, sucesos dependientes:

$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1).p(A_2/A_1) = \dfrac{4}{10}.\dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15}$

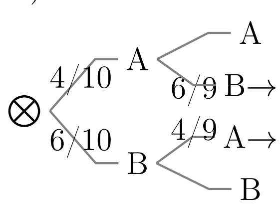


b) Con devolución, sucesos independientes:

$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1).p(A_2) = \dfrac{4}{10}.\dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{25}$



II) Como es la unión de varias ramas, se suman las probabilidades de las ramas favorables:



$p[(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)] = p(A_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap A_2) = \dfrac{4}{10}.\dfrac{6}{9} + \dfrac{6}{10}.\dfrac{4}{9} = \dfrac{24}{45}$

Dos sucesos A y B son **independientes** si la realización de uno no varía la probabilidad de la realización del otro;

Si se lanza una moneda y un dado, el salir cara en la moneda es independiente de que salga par en el dado. Si lanzo una moneda la primera vez la probabilidad de salir cara es $1/2$, si la lanzo la segunda vez la probabilidad de cara sigue siendo $1/2$. En cambio si extraigo una carta de una baraja la probabilidad de salir espada la primera vez es $10/40$, si no devuelvo la carta, evidentemente la probabilidad de salir espada en la segunda no es $10/40$, pues ha cambiado la composición de la baraja.

Para sucesos independientes la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades: $p(A \cap B) = p(A).p(B)$

Dados dos sucesos A, B , se llama suceso B **condicionado al** A y se representa B/A, al suceso "realizarse el suceso B supuesto realizado el suceso A".

Para sucesos dependientes la probabilidad de la intersección es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo condicionado al primero: $p(A \cap B) = p(A).p(B/A)$

Ejemplos

1. Para no confundir la velocidad con el tocino se estudió una muestra de 100 casos y se obtuvieron estos datos:

	Tocino T	No tocino
Velocidad V	32	48
No velocidad	8	12

Según estos datos, ¿son independientes los sucesos T y V?

$p(V).p(T) = \frac{80}{100}.\frac{40}{100} = 0'32$

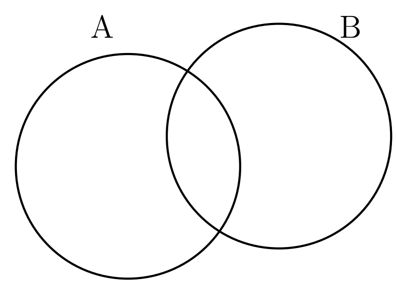
$p(V \cap T) = \frac{32}{100} = 0'32$

efectivamente la velocidad y el tocino , V y T son independientes.

2. Sean A y B dos sucesos independientes de un espacio de probabilidades. Sean $0'3$ y $0'6$ sus probabilidades respectivas. Hallar las probabilidades de cada uno de los sucesos siguientes:

S_1 acontece exactamente uno de los sucesos A o B, uno de los dos pero no los dos.

S_2 acontecen los dos A y B.



$p(S_1) = p(A \cup B - A \cap B) = p(A) + p(B) - 2p(A \cap B)$

necesitamos $p(A \cap B)$ que es el 2^0 apartado, como son independientes:

$p(A \cap B) = p(A).p(B) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18 = p(S_2)$

luego $p(S_1) = 0'3 + 0'6 - 2 \cdot 0'18 = 0'54$

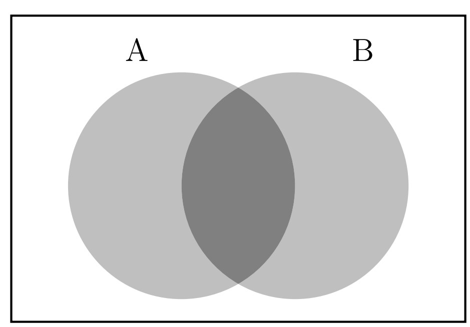
3. Sean A y B dos sucesos, tales que $p(A) = \frac{3}{4}$, $\quad p(B) = \frac{1}{2}$, $\quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$. Calcular:

a) $p(A \cup B)$

b) $p(A \cap B)$

c) $p(\bar{A}/B)$

Nota: $\bar{A}$ representa el suceso complementario de A.



a) Como vemos en el dibujo $A \cup B$ es lo contrario de $\bar{A} \cap \bar{B}$ por tanto $p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

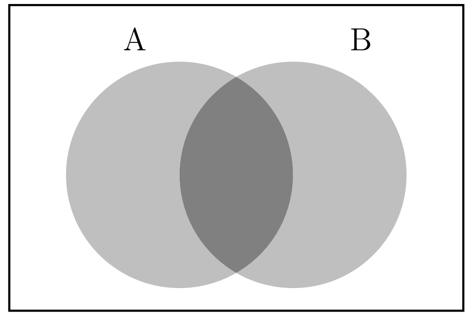
b) Partiendo de la probabilidad de la unión:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$,

sustituyendo: $\frac{19}{20} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - p(A \cap B)$ y despejando queda: $p(A \cap B) = \frac{19}{20} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

c) $p(\bar{A}/B) = \dfrac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{5}$

4. El 40 % de los alumnos de un curso aprueba la asignatura A. De los que aprueban la asignatura B, el 30 % aprueba la asignatura A. Además el 30 % no aprueba ninguna. Hallar la probabilidad de suspender B habiendo aprobado A.



Sea A "aprobar A"
Sea B "aprobar B"

$$p(A) = 0'4$$
$$p(A/B) = 0'3$$
$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0'3$$

$p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0'3 = 0'7$

$$\begin{cases} p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0'7 = 0'4 + p(B) - p(A \cap B) \\ 0'3 = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \end{cases}$$

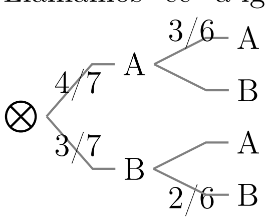
$$\begin{cases} 0'3 = p(B) - p(A \cap B) \\ p(A \cap B) = 0'3 \cdot p(B) \end{cases} \quad 0'3 = p(B) - 0'3 \cdot p(B); \quad p(B) = \frac{3}{7}; \quad p(A \cap B) = \frac{9}{70}$$

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0'4 - \frac{9}{70} = \frac{19}{70}; \qquad p(\bar{B}/A) = \frac{p(\bar{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{19}{70}}{0'4} = 0'6786$$

La probabilidad de suspender B habiendo aprobado A es 67'86 %

5. En una urna hay bolas: 4 azules y 3 blancas. Se extraen dos bolas simultáneamente. Hallar la probabilidad de que sean las dos blancas sabiendo que han salido de igual color.

Llamamos "cc" a igual color, piden $p(BB/cc)$



$$p(BB) = \frac{3}{7} . \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$
$$p(cc) = \frac{4}{7} . \frac{3}{6} + \frac{3}{7} . \frac{2}{6} = \frac{3}{7}$$

Para la intersección tenemos que $BB \subset cc$ luego $p(BB \cap cc) = p(BB)$:

Despejando en la expresión: $p(BB \cap cc) = p(BB/cc) \cdot p(cc)$

$$p(BB/cc) = \frac{p(BB \cap cc)}{p(cc)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

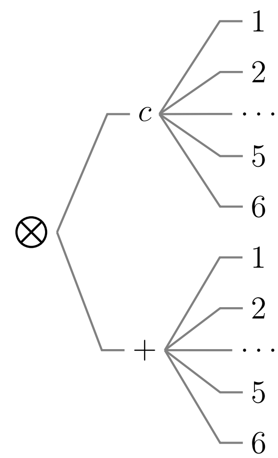
Observaciones:

1. Resumiendo:

independientes $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ **dependientes** $p(A \cap B) = p(B/A).p(A)$

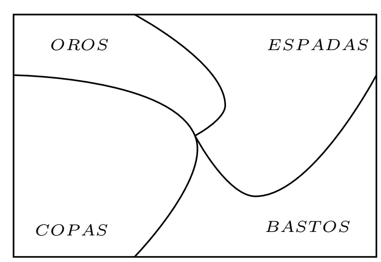
2. No confundir sucesos incompatibles (la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades), con sucesos independientes (la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades).Por eso:

   Dos sucesos compatibles pueden ser dependientes o independientes. Dos sucesos incompatibles necesariamente son dependientes.



3. En la extracción de, por ejemplo, dos bolas de una urna es lo mismo: extracción simultánea de las dos, que extracciones sucesivas sin devolución.
4. Experimentos independientes simultáneos es situación análoga a extracción sucesiva con devolución, esto permite utilizar diagrama en árbol. Por ejemplo se lanza un dado y una moneda.

7.6. Sistema completo de sucesos

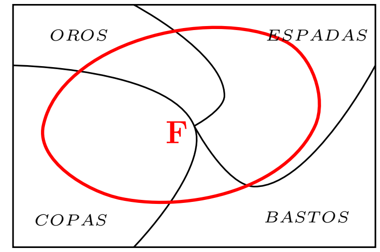


Un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un sistema completo de sucesos cuando:
1) son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$
2) su unión es todo el espacio muestral: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$
Ejemplo: En la extracción de una carta de una baraja, los sucesos salir copas, salir espadas, salir bastos y salir oros forman un sistema completo de sucesos.

7.7. Teorema de la probabilidad total

Dado un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Sea B un suceso, entonces:

$$p(B) = \sum_{1}^{n} p(B/A_i).p(A_i)$$



Demostración:
$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$ unión disjunta
$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + (B \cap A_n) = \sum_1^n p(A_i).p(B/A_i)$

En el ejemplo anterior sea F salir figura (sota, caballo, rey), (llamaremos S salir espada)
Por ejemplo $p(F/C) = \frac{3}{10}$, pues hay tres figuras en las diez copas, por tanto:

$$p(F) = p(F/C).p(C) + p(F/B).p(B) + p(F/S).p(S) + p(F/O).p(O) = \frac{3}{10}\frac{10}{40} \cdot 4 = \frac{12}{40}$$

7.8. Teorema de Bayes

Dado un sistema completo de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, Sea B un suceso, entonces: $p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i).p(A_i)}{\sum_1^n p(B/A_i).p(A_i)}$

Demostración:

$$p(A_i/b) = \frac{p(Ai \cap B)}{p(B)} = \text{sustituyendo el denominador por el teorema anterior} = \frac{p(A_i).p(B/A_i)}{\sum_1^n p(A_i).p(B/A_i)}$$

Se utilizan las siguientes denominaciones: $p(A_i)$ se llaman probabilidades a priori (si no se especifican se toman iguales), $p(A_i/B)$ se llaman probabilidades a posteriori, $p(B/A_i)$ se llaman verosimilitudes.

Ejemplo Una fábrica tiene tres máquinas que producen tornillos, la máquina 1^a produce el 10 % del total, la 2^a produce el 60 % y la 3^a el 30 % restante.

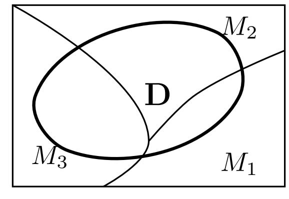
La probabilidad de que la primera produzca un tornillo defectuoso es 0'20, que lo produzca la segunda es 0'32 y la tercera 0'16.

a) De una caja de tornillos producidos por esa fábrica tomamos uno, ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?.

b) De una caja tomamos un tornillo y resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina 1^a?

c) Probabilidad de tomar un tornillo que sea bueno y de la máquina uno.

Solución:
sea M_1 el suceso "tornillo producido por la 1^a máquina"; $p(M_1) = 0'1$
sea M_2 el suceso "tornillo producido por la 2^a máquina"; $p(M_2) = 0'6$
sea M_3 el suceso "tornillo producido por la 3^a máquina"; $p(M_3) = 0'3$



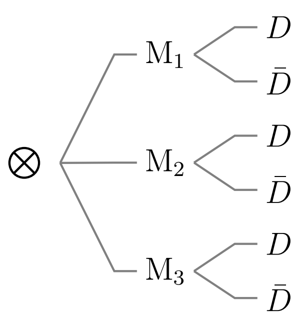
Suceso: $D =$ "coger un tornillo defectuoso"
las probabilidades del suceso D condicionadas por M_1, M_2, M_3 son
$p(D/M_1) = 0'20, p(D/M_2) = 0'32, p(D/M_3) = 0'16$

a) Por el teorema de la probabilidad total:
$p(D) = p(M_1).p(D/M_1)+p(M_2).p(D/M_2)+p(M_3).p(D/M_3) = 0'1{,}0'2+0'6{,}0'32+0'3{,}0'16 = 0'26$

b) Por Bayes: $p(M_1/D) = \dfrac{p(D/M_1).p(M_1)}{\sum_1^3 p(D/M_i).p(M_i)} = \dfrac{0'1{,}0'2}{0'26} = \dfrac{1}{13}$

c) $p(M_1 \cap \bar{D}) = p(\bar{D}/M_1).p(M_1)$; $p(\bar{D}/M_1) = 1 - p(D/M_1) = 1 - 0'2 = 0'8$
queda: $p(M_1 \cap \bar{D}) = 0'8 \cdot 0'1 = 0'08$

Otra forma con árbol:



a) $p(D) =$ suma tres ramas $= 0'26$

b) $p(M_1/D) = \dfrac{p(M_1 \cap D)}{p(D)}$

$p(M_1 \cap D) = p(D/M_1).p(M_1) = 0'2 \cdot 0'1 = 0'02$

$$p(M_1/D) = \frac{0'02}{0'26} = \frac{1}{13}$$

c) $p(M_1 \cap \bar{D}) = p(\bar{D}/M_1).p(M_1) = 0'8 \cdot 0'1 = 0'08$

7.9. Problemas

1. Escribir el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado dos veces. a) Mediante diagrama en árbol. b) Por extensión.

2. Escribir el espacio muestral correspondiente a la suma de puntos en el lanzamiento de un dado dos veces. ¿Tiene la misma probabilidad el 8 que el 3?.

   Solución: $p(tres) = 2/36$, $p(ocho) = 5/36$

3. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Escribir el espacio muestral.

4. Se tiran un dado y una moneda. Hallar la probabilidad de obtener cruz y número primo.

   Solución: 0'3333

5. En una urna hay 3 bolas blancas, 4 negras, 5 rojas y 6 azules. Hallar: a) Probabilidad de que al sacar una bola sea azul. b) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean blancas. c) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean, la primera negra y la segunda roja.

   Solución: a) 0'3333 b) 0'0196 c) 0'0653

6. Hallar la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja española: a) sean 2 oros, sin devolver la primera carta. b) sean 2 figuras, devolviendo la primera carta.

   Solución: a) 0'0576 b) 0'09

7. En una clase mixta hay 30 alumnas; 15 estudiantes repiten curso de los que 10 son alumnos y hay 15 alumnos que no repiten curso. a) Justificar que el número de estudiantes de esa clase es 55. b) Si se elige al azar un estudiante de esa clase: b_1) ¿Cuál es la probabilidad de sea alumno?. b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que repita curso y sea alumna?. c) Si se eligen dos estudiantes al azar ¿cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?.

   Solución: a) 55 estudiantes, b_1 25/55, b_2 5/55, c)52/99

8. La caja C_1 contiene 5 fichas azules y 3 rojas, la caja C_2 contiene 4 fichas azules y 6 rojas. Se traslada una ficha de la caja C_1 a la caja C_2; a continuación se extrae una ficha de C_2. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha extraída sea roja?.

   Solución: p(roja extracción 2^a caja) = 51/88

9. Si se tiene una moneda trucada de forma que al lanzarla la probabilidad de obtener cara es 2/3 y la probabilidad de obtener cruz es 1/3. Se efectúa la siguiente experiencia: se lanza la moneda al aire, y si sale cara se toma al azar un número del 1 al 9; si sale cruz se toma al azar un número del 1 al 5. Calcular la probabilidad de que al realizar la experiencia el número escogido sea par.

   Solución: p(n^o par) = 0'42 = 58/135

10. Dar las definiciones y poner ejemplos de los siguientes conceptos: i) Experimento aleatorio ii) Suceso seguro iii) Probabilidad de Laplace iv) Sucesos incompatibles.

11. Se lanzan simultáneamente tres monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que todas queden en el suelo del mismo modo?.

Solución: $p(c) + p(+) = 1/4$

12. Se extraen 3 cartas de una baraja española (40 cartas). Hallar la probabilidad de que sean 3 bastos; a) sin reemplazamiento; b) con reemplazamiento.

    Solución: a) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40{,}9/39{,}8/38 = 0'012$, b) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40{,}10/40{,}10/40 = 0'015$

13. Se lanzan 6 monedas simultáneamente. Calcular la probabilidad de que al menos salga una cara.

    Solución: $63/64$

14. Consideremos la baraja española (40 cartas). Extraemos una carta al azar, miramos de que palo es y la devolvemos a la baraja. Repetimos la misma operación cuatro veces seguidas. Se pide: a) Probabilidad de haber sacado dos veces solamente una carta de oros. b) Probabilidad de haber sacado más de dos cartas de bastos. c) Hallar las probabilidades en los dos casos anteriores en el supuesto de que no devolvemos las cartas en cada extracción.

    Solución: a) 0'2109, b) 0'05078, c_1) 0'214, c_2 0'041

15. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las bolas sean del mismo color.

    Solución: $1/3(11/21 + 3/4 + 29/45)$

16. Se lanzan dos dados. Calcular la probabilidad de

    i) Salir dos 6

    ii) Salir números consecutivos.

    iii) Salir dos números con suma igual a 7.

    Solución: i) $1/36$, ii) $5/18$, iii) $1/6$

17. La probabilidad de que un hombre siga vivo dentro de 25 años es $3/5$ y la de que su esposa lo esté es $2/3$. Halle la probabilidad de que al cabo de ese tiempo

    i) Ambos estén vivos.

    ii) Solo viva el hombre.

    iii) Solo viva la esposa.

    iv) Al menos uno esté vivo.

    Solución: i) $6/15$, ii) $1/5$, iii) $4/15$, iv) $13/15$

18. De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos cartas. Encuentre la probabilidad de que:

    i) Al menos una sea espadas.

    ii) Una sea de espadas y otra de oros.

    Solución: i) 0'4414, ii) $6/47$

19. Se lanza un dado y, a continuación, una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

    i) Cuatro y cara.

    ii) Cruz e impar.

    iii) Cara o un número mayor que 1.

    Solución: i) $1/12$, ii) $3/12$, iii) $11/12$

20. En una urna hay 20 bolas blancas y 10 negras. Hallar la probabilidad de que al extraer dos bolas, realizando la extracción sin devoluciones, las dos bolas sean del mismo color.

    Solución: $47/87$

21. Encontrar la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga: i) Dos seises. ii) Dos números iguales. iii) 8 de suma

    Solución: i) 1/36, ii) 1/6, iii) 5/36

22. Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 rojas y 6 negras. Se extrae al azar una bola y se sabe que no es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?. Se devuleve la bola a la urna y se extrae de nuevo una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o blanca?.

    Solución: i) 1/2, ii) 8/11

23. Se lanza un dado cinco veces y se anotan los números obtenidos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro números primos?. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los números sean compuestos?. (Nota: el número 1 se considerará primo).

    Solución: p(4 primos) = 80/243, p(5 compuestos) = $(2/6)^5$ = 1/243

24. Sean A y B dos sucesos, tales que $p(A) = \frac{1}{2}, \quad p(B) = \frac{2}{5}, \quad p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$

    1. $p(B/A)$
    2. $p(\bar{A}/B)$

    Nota: $\bar{A}$ representa el suceso complementario de A.

    Solución: a) 1/2, b) 3/8

25. Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades:

    $p(A) = 0'7; \quad p(B) = 0'5; \quad p(A \cap B) = 0'45$

    Calcular:

    1. $p(B/A)$
    2. $p(A^c \cap B^c)$

    Nota: A^c representa el suceso complementario de A.

    Solución: a) $0'6428$, b) $0'25$

26. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $p(A) = \frac{1}{4}, \quad p(B) = \frac{1}{3}, \quad p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{11}{12}$

    1. ¿Son A y B dos sucesos independientes? Razónese.
    2. $p(\bar{A}/\bar{B})$

    Nota: $\bar{A}$ representa el suceso complementario de A.

    Solución: a) son independientes, b) 3/4

27. Se lanza 6 veces un dado de póker ¿cuál es la posibilidad de que salga al menos un as?

28. Se tienen dos urnas A y B, en la primera hay 6 bolas negras y 4 rojas; en la segunda hay 3 bolas negras, 2 rojas y 5 blancas. Se lanza un dado y si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en caso contrario de la B. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola sea roja?.

    Solución: 4/15

29. Se lanzan a la vez 20 dados. Calcular las probabilidades:

    i) Sólo salga el número 6.

    ii) Salgan solo números pares.

30. Un dado está trucado de forma que la probabilidad de sacar 2 es doble que la de obtener 1; la de sacar 3 es triple que la de 1; la de 4 cuádruple que la de 1 y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 4?.

    Solución: 4/21

31. En una clase, el 40 % aprueban Filosofía y el 50 % Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la Filosofía habiendo aprobado las Matemáticas es 0'8. Prueba que la mitad de la clase suspende ambas asignaturas y calcula el porcentaje de alumnos que teniendo aprobada la Filosofía aprueban también las Matemáticas.

   Solución: a) 0'5 b) el 100 %

32. De una baraja española de 40 cartas se extraen 4 sucesivamente sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que sean del mismo palo.

   Solución: 4(10/40)(9/39)(8/38)(7/37) = 0'009

33. En un cierto edificio se usan dos ascensores; el primero lo usan el 45 % de los vecinos y el resto usan el segundo. El porcentaje de fallos del primero es del 5 % mientras que el del segundo es del 8 %. Si en un cierto día un inquilino queda "atrapado" en un ascensor, hallar la probabilidad de que haya sido en el primero.

   Solución: $\frac{225}{225+440} = 0'34$

34. Dos personas A y B organizan el siguiente juego: Tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A. Si no sale ningún 1, gana B. ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidades de ganar?

   Solución: $p(B) = (\frac{5}{6})^3 = 0'5787 > 0'5$ gana B

35. Dos amigos A y B juegan al tenis entre sí habitualmente. Han comprobado que de cada 10 sets A gana 6. Hallar la probabilidad de que B gane un partido a tres sets.

   Solución: árbol incompleto AA, ABA, etc $0'352$

36. Pepe es el encargado de tirar los penaltis en su equipo, su probabilidad de hacer gol es 1/3. ¿Cuántas veces le deberá mandar repetir el lanzamiento de un penalti el árbitro del próximo encuentro para garantizar a Pepe un 75 % de posibilidades de hacer gol?

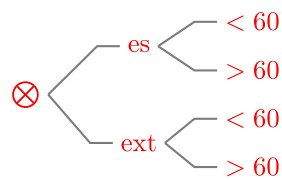
   Solución: $1 - (\frac{2}{3})^n \geq= 0'75, n = 4$

37. El 45 % de los habitantes de una determinada ciudad son del Barça y los demás son del Madrid. Un 27 % de los del Barça y el 38 % de los del Madrid además juegan al fútbol. Calcular la probabilidad de que al elegir un habitante: a) Juegue al fútbol b) Sea del Barça sabiendo que no juega al fútbol.

   Solución: a) 0'33, b) 0'4906

38. El 80 % de los turistas que el año pasado visitaron nuestra región eran españoles y de estos el 40 % tenían más de 60 años. De los extranjeros el 75 % tenía más de 60 años. Escogida una persona al azar, se pide: a) Si no es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 60 años? b) Si es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 60 años? c) Cuál es la probabilidad de que tenga más de 60 años?

   Solución:

   a) $p(< 60/ext) = 0'25$

   b) $p(> 60/es) = 0'40$

   c)TPT $p(> 60) = 0'8 \cdot 0'4 + 0'2 \cdot 0'75 = 0'47$

39. Ana, Pedro y Juan se reparten los problemas que tienen que resolver. Se quedan respectivamente con el 23 %, 44 %, y 33 %. Sabemos que Ana resuelve correctamente el 60 % de los problemas que intenta, Pedro

el 20 % y Juan el 40 %. a) Hallar la probabilidad de que al elegir un problema al azar esté mal hecho. b) Hallar la probabilidad de que al elegir un problema al azar y que resulta que está mal resuelto sea de los hechos por Juan.

Solución: a) 0’642, b) 0’308

40. Los datos de votantes en unas elecciones muestran que votó el 73’5 % de los hombres censados y que no votó el 42’9 % de las mujeres. El censo era de 48 % hombres y el 52 % mujeres.

    De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. Calcular la probabilidad de que esta persona: a) Haya votado. b) Haya votado y sea hombre. c) Sabiendo que ha votado, sea mujer.

    Solución: a) 0’649, b) 0’352, c) 0’457

41. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A,B y C. El número de unidades de cada tipo que produce es el mismo. Salen defectuosos de cada mil 15 del tipo A, 3 del tipo B y 7 del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70 % de todos los bolígrafos defectuosos de tipo A, el 80 % del tipo B y el 90 % del tipo C. Los bolígrafos defectuosos detectados en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcular la probabilidad de que sea de tipo A.

    T= bolígrafo defectuoso tirado

    A = defectuoso de A $p(A) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{15}{1000}$

    B = defectuoso de B $p(B) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{1000}$

    C = defectuoso de A $p(C) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{7}{1000}$

    $p(A/T) = \dfrac{p(T/A)p(A)}{p(T/A)p(A) + p(T/B)p(B) + p(T/C)p(C)} = \dfrac{0'7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{1000}}{0'7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{1000} + 0'8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1000} + 0'9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{1000}} = 0'546$

42. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para A y 3/5 son para B. Sus ocupaciones les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50 % del tiempo y B el 25 %. Calcular la probabilidad de que no está ninguno para responder al teléfono. Llaman por teléfono y no lo cogen, cuál es la probabilidad de que llamen a A.

    Solución: a) 0’35, b) 0’57

43. El despertador de Pepe no suena el 20 % de las veces. Cuando no suena el despertador llega tarde a clase el 84 % de los días, en cambio cuando suena llega tarde solo el 12 %. Hoy Pepe ha llegado puntual, cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador.

    Solución: 0’956

44. La fabricación de cierto tipo de objetos se hace en dos fases, la probabilidad de que resulte defectuoso en la primera fase es del 4 % mientras que en la segunda es del 1 %. ¿Cuál es la probabilidad de que un objeto tomado al azar no tenga defectos?

    Solución: por árbol en dos fases $p(nodef) = 0'96{,}0'99 = 0'9504$

45. Tenemos tres bolsas iguales, la A con 13 bolas negras y 15 blancas, la B con 16 bolas negras y 12 blancas y la C con 7 bolas negras y 13 blancas

    a) Se coge una bola de una bolsa al azar y resulta negra, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la bolsa A.

    b) Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

Solución: a) Bayes (vuelta atrás de árbol) $p(A/n) = \dfrac{65}{194} = 0'33$

b)árbol normal $p(b) = \frac{113}{210}$

46. El test para detectar una sustancia contaminante en agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0,99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0,05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0,99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

   El test detecta que el agua está contaminada, cuando en realidad no lo está el 83,33 % de las veces. Se trata de un mal producto.

47. Una urna A contiene 3 bolas blancas y una negra y otra urna B contiene 5 bolas negras y 7 blancas. Se extraen dos bolas de la urna A y, sin mirar el color, se introducen en la B. A continuación se extrae una bola de la urna B.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea negra?

   b) Si la bola extraída ha sido negra, cuál es la probabilidad de que las dos bolas pasadas de A a B fueran blancas.

   a) árbol $p(N) = 11/28$,

   b) Bayes: $p(pase2blancas/extraernegra) = \frac{p(\frac{extraernegra}{pase2blancas})p(pase2blancas)}{p(extraernegra)} = \frac{\frac{5}{14}(\frac{3}{4}\frac{2}{3})}{\frac{11}{28}} = \frac{140}{308}$

48. En química clínica son particularmente interesantes los llamados coeficientes falso-positivo y falso-negativo de un test. Tales coeficientes son probabilidades condicionadas. El coeficiente falso-positivo α es la probabilidad de que el contraste resulte positivo cuando de hecho el sujeto no padece la dolencia. El coeficiente falso-negativo β se define de manera análoga. Cada una de estas probabilidades es una probabilidad de error; por tanto, cabe esperar que los valores obtenidos en la práctica sean próximos a cero.

   Los resultados siguientes se obtuvieron en un estudio diseñado con el fin de averiguar la capacidad de un cirujano patólogo para clasificar correctamente las biopsias quirúrgicas como malignas o benignas (T^+ = diagnóstico es positivo; R^+ = la biopsia es en realidad maligna)

	T^+	T^-
R^+	79	19
R^-	7	395

   Determinar α y β a partir de estos datos.

   $\alpha = p(T^+/R^-) = \dfrac{7}{402} = 0'017$; $\beta = p(T^-/R^+) = \dfrac{19}{98} = 0'193$

	T^+	T^-
R^+		$\beta = p(T^-/R^+)$
R^-	$\alpha = p(T^+/R^-)$	

Tema 8

VARIABLES ALEATORIAS. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

8.1. Variable aleatoria. Función de distribución de probabilidad

Es el modelo matemático de la variable estadística. Se dice que hemos definido una variable aleatoria X (v.a.) para un experimento aleatorio cuando hemos asociado un valor numérico a cada resultado del experimento.

Ejercicio Imagínese un juego de apuestas con estas normas: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euro si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. Se lanza el dado 60 veces y se obtienen los siguientes resultados:

3, 4, 6, 1, 3, 1, 1, 5, 6, 6, 1, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 5, 6, 1, 1, 3, 2, 4, 5, 5, 3, 2, 5, 6, 5, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 6, 1, 5, 5, 5, 5, 2, 4, 3, 3, 1, 4, 5, 2, 2, 6

Se considera la variable estadística que dé las ganancias y pérdidas:

1) Hacer la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

2) Dibujar el diagrama de frecuencias y el polígono de frecuencias.

número	1	2	3	4	5	6
frecuencia	11	10	8	6	13	12

número	var. estad. X	frecuencia n_i	frec. relativa f_i
{ 3 }	-5	8	0'13
{ 4,5,6 }	1	31	0'51
{ 1,2 }	3	21	0'35
		$\Sigma n_i = 60$	

Ejemplo 1) Considérese el juego anterior: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euros si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. La v.a. que describe las posibles ganancias en este juego es $X(1) = 3, X(2) = 3, X(3) = -5, X(4) = 1, X(5) = 1, X(6) = 1$.

A cada valor que toma la variable le podemos asociar la probabilidad del suceso que representa:

x_i	-5	1	3
p_i	$1/6$	$3/6$	$2/6$

Ejemplo 2) Lugar de rotura de una cuerda de 3 m al tirar de un extremo estando el otro fijo, $E =$ conjunto de lugares de rotura $= [0, 3]$, $X =$longitud del punto de corte al punto fijo.

Hay dos tipos de variable aleatoria, **continua** cuando puede tomar cualquier valor de un intervalo de R, ejemplo 2), y discreta el en caso que tome un número finito de valores: ejemplo 1).

A los valores que toma la variable se le puede asociar la probabilidad de los sucesos que representan.

Función de distribución de la v.a. X es la función $F : R \longrightarrow R$ dada por $F(x) = p(X \leq x)$

Los valores que toma $F(x)$ miden la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que x, $F(x)$ es la función de probabilidades acumuladas. Es una función creciente que toma valores entre 0 y 1.

Ejemplo 1: $F(2'5) = p(X \leq 2'5) = p(X = -5) + p(X = 1) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$

Ejemplo 2: $F(2'5) = p(X \leq 2'5) = \dfrac{\text{longitud favorable}}{\text{longitud posible}} = \dfrac{2'5}{3}$

8.2. Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Los valores que toma la variable se suelen expresar $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

En el ejemplo 1) : $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$

A cada valor que toma la variable le asociamos la probabilidad del suceso que representa,

$X \longrightarrow p(X); \quad p(X = -5) = 1/6, p(X = 1) = 3/6, p(X = 3) = 2/6,$

En general: La **función de probabilidad** de la v.a. discreta X es la función $p : R \longrightarrow R$ dada por $p(x) = p(X = x)$

Los valores que toma: $p(X = x_i) = p(x_i) = p_i$ miden la probabilidad de que la variable X tome el valor x_i.

Tomando intervalos de longitud uno con centro en los valores de la v.a. x_i tenemos el **histograma de probabilidad** de la v.a. X.

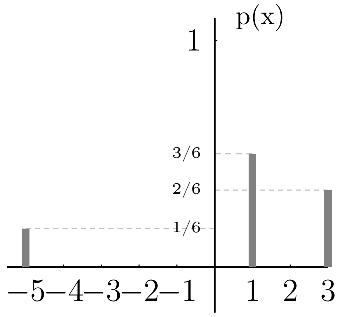
En el ejemplo:

x_i	-5	1	3
p_i	$1/6$	$3/6$	$2/6$
$F_i = p(X \leq x_i)$	$1/6$	$4/6$	1

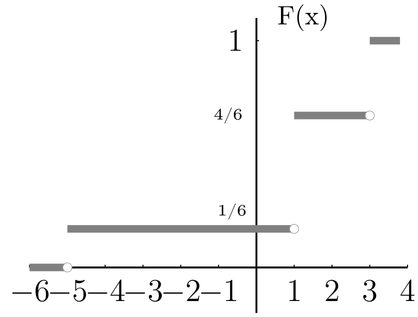
La función de distribución de una v.a. discreta X es una función escalonada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -5 \\ \frac{1}{6} & si \quad -5 \leq x < 1 \\ \frac{4}{6} & si \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad 3 \leq x \end{cases}$$

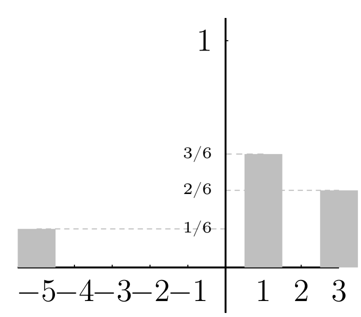
Función de Probabilidad



Función de Distribución



Histograma de Probabilidad



En el histograma de probabilidad la suma de las áreas de los rectángulos hasta un valor x_i (incluido el suyo) da la probabilidad $p(X \leq x_i)$.

8.3. Relación entre variables estadísticas y aleatorias

Para muestras grandes las frecuencias relativas tienden a las correspondientes probabilidades, lo cual nos permite considerar a las funciones de probabilidad como el modelo teórico de las frecuencias relativas y a las funciones de distribución de probabilidad como el modelo de las frecuencias relativas acumuladas, que son las que se pueden obtener en la práctica, pues no se puede hacer un número infinito de observaciones. Es lo que llamábamos probabilidad empírica.

Así por ejemplo en el problema que resolveremos más adelante:

"En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de seis automóviles más de la mitad sean defectuosos?" Se toma como probabilidad de que un automóvil resulte defectuoso $p = 10/1000 = 0'01$.

8.4. Parámetros de una variable aleatoria discreta

Recordemos que: la media de un conjunto de números es la media aritmética. La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza. La varianza es la media de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media anterior.

Media de una variable estadística es: media $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \Sigma x_i f_i$

Desviación típica: $(\text{des. tip.})^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2 . n_i}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2 = \Sigma x_i^2 . f_i - \bar{x}^2$

Que se corresponden con los los parámetros una variable aleatoria discreta:

Esperanza matemática o media: $\mu = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i p_i$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i^2 p_i - \mu^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

Intuitivamente, si la variable aleatoria describe las ganancias y pérdidas de un determinado juego, la esperanza indica la ganancia media por partida que puede esperar un jugador. Si la esperanza es cero se dice que el juego es equitativo; en caso contrario, es favorable o desfavorable al jugador según que la esperanza sea positiva o negativa.

La desviación típica determina, junto con la esperanza, el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ en el que se espera se produzcan "la mayoría de los resultados".

En el ejemplo resultaría:

$E(X) = \frac{1}{6}(-5) + \frac{3}{6}1 + \frac{2}{6}3 = \frac{4}{6} = 0'666$

$\sigma^2 = \frac{1}{6}(-5)^2 + \frac{3}{6}1^2 + \frac{2}{6}3^2 - \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{260}{36} = 7'222; \quad \sigma = \sqrt{7'222} = 2'68$

8.5. Función de densidad de probabilidad de una v.a. continua

Ejemplo Lugar de rotura de una cuerda de 3 m al tirar de un extremo estando el otro extremo fijo.

X =longitud del punto de rotura al extremo fijo, puede tomar cualquier valor entre 0 y 3.

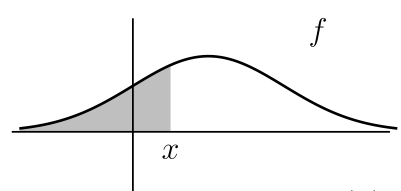
Consideremos: probabilidad = casos favorables / casos posibles; la probabilidad de que se rompa en un punto determinado $X = x_0$ es cero pues en este caso casos favorables / casos posibles = "$1/\infty$" = 0. Por ello:

Para una v.a. continua no tiene sentido hablar de probabilidad de que la variable tome un determinado valor porque habría que dividir por "infinitos" casos posibles

Se introduce entonces el concepto de **función de densidad de probabilidad f(x)** que indica la cantidad de probabilidad en esa zona:

Entonces

$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, o sea la función de distribución es el área bajo la curva $f(t)$ entre el inicio de la gráfica y el valor x.



el área vale $F(x)$

Por tanto se cumple que una función de densidad siempre es positiva y además: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, o sea el área desde el principio hasta el final vale 1.

8.6. Parámetros de una variable aleatoria continua:

Esperanza matemática: $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$

Varianza: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

Ejemplo Se define la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x/4 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Comprobar que cumplen las condiciones de función densidad.

b) Representar gráficamente.

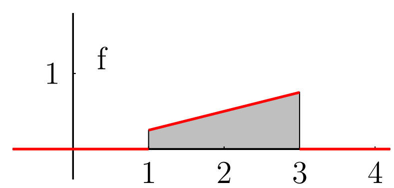
c) Calcular $p(1/2 \leq x \leq 2)$

d) Calcular la correspondiente función de distribución y representarla.

e) Calcular la media y la varianza

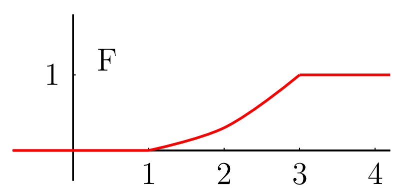
Solución:

a) f es siempre positiva y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^3 \frac{x}{4} = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^3 = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1,$



c) $p(1/2 \leq x \leq 2) = \int_{1/2}^{2} f(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{4} = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^2 = \frac{3}{8},$

d) $F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{t}{4}dt = \left[\frac{t^2}{8}\right]_1^x = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ x^2/8 - 1/8 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

e) media $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^3 x\frac{x}{4} = \frac{1}{4}\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^3 = \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} = 2'16$

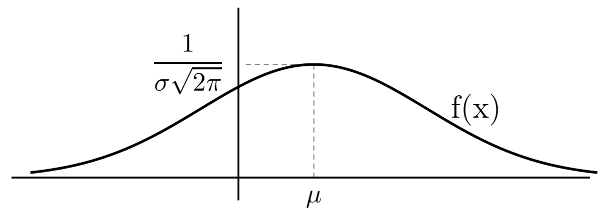
varianza $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = \int_1^3 x^2\frac{x}{4} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = 5 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} = 0'30$

8.7. Distribución normal

La variable aleatoria continua más utilizada es la normal, su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

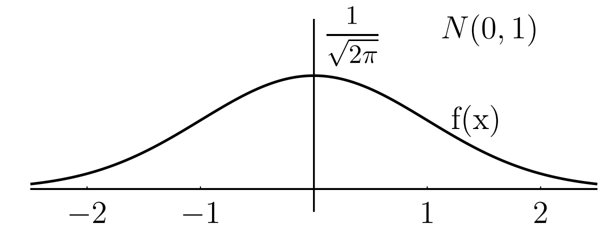
Se suele expresar $N(\mu, \sigma)$; los parámetros μ y σ son respectivamente el valor medio y la desviación típica, la curva se llama campana de Gauss.



La normal $N(0, 1)$ tiene de función densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

cuyos parámetros son $\mu = 0, \sigma = 1$, y tiene las integrales de $f(x)$ tabuladas.



Para la $N(0, 1)$ en nuestra tabla aparece $p(Z \leq z)$, siendo $z \geq 0$, para buscar otras probabilidades hay que utilizar la simetría de $f(z)$, y el complementario.

Ejercicios: Hallar: a) $p(Z \leq 0'34) =$, b) $p(Z < -2'85) =$, c) $p(Z \geq 2'1) =$, d) $p(Z \leq 3'8) =$ e) $p(-1 < Z \leq 2'37)$

Para hallar las probabilidades de una normal cualquiera $N(\mu, \sigma)$ se hace el cambio de variable (se llama tipificar) $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ que la transforma en la normal $N(0, 1)$.

Ejercicios:

1) Hallar en $N(8, 3)$el valor de $p(X \leq 9'6) = p(Z \leq 0'53)$

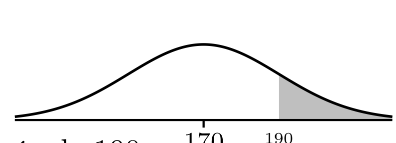
2) (Proceso inverso), en $N(0, 1)$ hallar z_0 tal que $p(Z \leq z_0) = 0'8438$, resulta mirando en el cuerpo de la tabla $z_0 = 1'01$

Ejemplos

1. Se eligió una muestra de 1000 personas de una determinada población y resultó que su talla media era de 170 cm, con una desviación típica de 10 cm. Suponiendo que las tallas se distribuyen normalmente, calcúlese cuantas personas de esa muestra miden: a) Más de 190 cm; b) Entre 160 y 190 cm.

   La v.a. X que describe las tallas de la población es del tipo $N(170, 10)$.

   a)
   $p(X > 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{190 - 170}{10} = 2 \right\} =$
   $p(Z > 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$

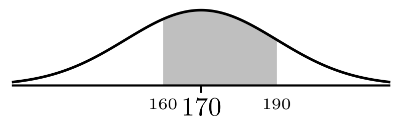
   

   Es de esperar que haya $0'0228 \cdot 1000 = 22'8 \approx 23$ personas de más de 190 cms.

b)

$p(160 < X < 190) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{160-170}{10} = -1 \\ z_2 = \frac{190-170}{10} = 2 \end{array} \right\} = p(-1 < Z < 2) = \left\{ \begin{array}{l} p(z < 2) = 0'9772 \\ p(z < -1) = 1 - 0'8413 = 0'1587 \end{array} \right\} = 0'9772 - 0'1587 = 0'8185$

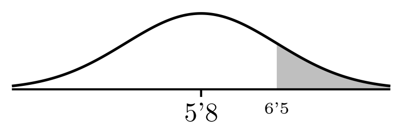
O sea 818 personas aproximadamente medirán entre 160 y 190 cm.



2. En una prueba de selectividad se ha obtenido de nota media 5'8 y la desviación típica es 1'75. Suponemos que las notas están distribuidas normalmente. Todos los alumnos que sobrepasen la nota 6'5 serán admitidos en la universidad. ¿Qué porcentaje de admitidos cabe esperar?

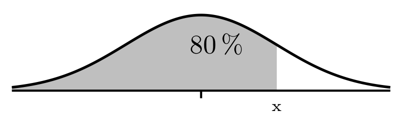
   $p(X \geq 6'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \frac{6'5 - 5'8}{1'75} = 0'4 \right\} = p(Z \geq 0'4) = 1 - p(Z \leq 0'4) = 1 - 0'6554 = 0'3446$

   Este valor es el tanto por uno, el tanto por ciento será 34'46 % de admitidos.

3. En una normal $N(23, 12)$, hallar el valor de la variable de manera que a su izquierda esté el 80 % de la probabilidad.

   Al contrario que antes buscamos un x concreto tal que $p(X \leq x) = 0'8$

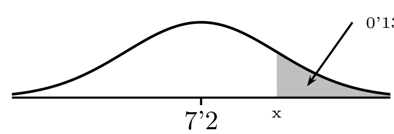
   En la $N(0, 1)$ tenemos que si $p(Z \leq z) = 0'8$, el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'7995 \text{ por defecto} \\ 0'8023 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'7995$ que corresponde con $z = 0'84$.

   sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad x = \sigma z + \mu = 12z + 23 = 12{,}0'84 + 23 = 33'08$

4. En una oposición la puntuación media del último examen fue 7'2 y la desviación típica 0'9. Hay plazas para un 13 % de los presentados. ¿Cuál es la puntuación mínima que un estudiante debe tener para conseguir plaza en la oposición?.

   Buscamos un x concreto tal que $p(X \geq x) = 0'13$

   Sabemos que $p(X \geq x) = 0'13$, en la $N(0, 1)$ para buscar en la tabla tenemos: $p(Z \geq z) = 0'13$, corresponde con $p(Z \leq z) = 0'87$ el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'8686 \text{ por defecto} \\ 0'8708 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'8708$ que corresponde con $z = 1'13$.

   sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad x = \mu + \sigma z = 0'9z + 7'2 = 0'9 \cdot 1'13 + 7'2 = 8'21$

Ejercicio En una competición deportiva se elimina al 5 % de los que llegan más tarde. Si el tiempo medio de la carrera ha sido de 87 minutos, con una desviación típica de 13 minutos ¿A partir de qué tiempo quedan eliminados?

Ejercicio Una máquina produce varillas de en teoría un metro de longitud con una desviación típica de 8 mm ¿Entre qué medidas estará el 95 % de las más exactas?

8.8. Problemas

1. Se tiene un dado correcto, pero de tal manera que tres caras tienen el número 2, dos caras el número 1 y una cara el número 3. Se considera la variable aleatoria X que asigna a cada resultado del dado el número obtenido. Estudiar la distribución de la variable aleatoria X representando su función de probabilidad y su función de distribución.

   Solución:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$
F_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

   $\mu = 11/6, \sigma = \sqrt{17}/6$

2. En una caja donde hay dos bolas blancas y tres negras se efectúa el siguiente experimento: se sacan dos bolas consecutivas sin reponer. Una bola blanca vale un punto y una negra, dos puntos. A cada extracción se asigna la suma de los puntos obtenidos. a) Espacio muestral o dominio de X. b) Recorrido de X. c) Hallar la distribución de la variable aleatoria X. d) Representar su función de probabilidad. e) Representar su función de distribución. g) El mismo ejercicio reponiendo la bola cada vez.

   Solución: a) $E = \{bb, bn, nb, nn\}$ b) $R = \{2, 3, 4\}$,

   c)

x_i	2	3	4
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$
F_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{14}{20}$	1

   $\mu = 16/5, \sigma = 3/5$

3. Hallar los parámetros en los dos problemas anteriores.

4. Se define la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 1/2 & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

   a) Comprobar que cumplen las condiciones de función densidad. b) Representar gráficamente. c) Calcular $p(1/2 \le x \le 2)$. d) Calcular las correspondiente función de distribución y representarla. e) Calcular la media y la varianza.

   Solución: c) $p(1/2 \ge x \ge 2) = 3/4$,

   d) $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x/2 & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

   e) media $= 1$, var $= 1/3$

5. Se define la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 1/x & si \quad 1 \le x \le a \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

   a) Hallar a para que cumpla las condiciones de función densidad. b) Representar gráficamente. c) Calcular la correspondiente función de distribución y representarla. d) Calcular la media y la varianza

   Solución:

   a) $a = e$, c) $F(x) = \begin{cases} 0 & si x < 1 & \\ \ln x & si & 1 \le x \le e \\ 1 & si & x > e \end{cases}$

   d) $\mu = e - 1, \sigma^2 = 0'241$

6. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(0,1)$ a) $p(z \le 2'78)$; b) $p(z \le -0'94)$; c) $p(z \le -1'7)$; d) $p(-1'24 \le z \le 2'16)$

   Solución: a) 0'9973, b) 0'1736, c) 0'0446, d) 0'8771

7. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(3,5)$ a) $p(x \le 4'3)$; b) $p(x < -1)$; c) $p(2 \le x \le 10)$

   Solución: a) 0'6026, b) 0'2119, c) 0'9192-0'4207=0'4985

8. Se supone que la estancia de los enfermos en un hospital sigue una distribución normal de media 8 días y desviación típica 3. Calcular la probabilidad de que la estancia de un enfermo, a) sea inferior a 7 días; b)

sea superior a 3 días; c) esté comprendida entre 10 y 12 días.

Solución: a) 0'3708, b) 0'9515, c) 0'1628

9. Se llama cociente intelectual al cociente entre la edad mental y la edad real. Se sabe que la distribución de los cocientes intelectuales de 2.000 reclutas sigue una distribución normal de media 0'80 y desviación típica 0'50. a) Número de reclutas con cociente intelectual comprendido entre 0'7 y 1'2. b) Id. inferior a 0'3. c) Id. inferior a 0'9. d) Id. superior a 1'4.

   Solución: a) 0'3674.2000 $\approx$ 735, b) 0'1587.2000 $\approx$ 318, c) $\approx$ 1159, d) $\approx$ 230

10. La media de las calificaciones obtenidas en las pruebas de acceso a la Universidad en cierta convocatoria fue $\mu = 4'7$ con una desviación típica $\sigma = 1'3$. Suponiendo que las calificaciones siguen una distribución normal, calcular: i) El porcentaje de aprobados. ii) El porcentaje de alumnos que obtuvo entre 4 y 6 puntos. iii) El porcentaje de alumnos que obtuvo menos de 3 puntos iv) El porcentaje de alumnos que obtuvo más de ocho puntos. v) ¿Entre qué notas se encuentra el 81 % de los alumnos?

    Solución: N(4'4,1'3) i) $p(X \geq 5) = 40'9\,\%$ ii) $p(4 \leq X \leq 6) = 54'67\,\%$ iii) $p(X \leq 3) = 9'68\,\%$ iv) $p(X \geq 8 = 0'57\,\%$, v) $(2'99, 6'4)$

11. Las estaturas de 500 reclutas están distribuidas normalmente con una media de 169 cms y una desviación típica de 7 cms. Calcular el número de reclutas cuya altura, i) está entre 165 y 175 cms ii) es mayor de 180 cms.

    Solución: N(169,7) i) $p(X \leq 175) = 0'823$, $p(X \leq 165 = 0'2843$, $p(165 \leq x \leq 175) = 0'518$ ii) $p(X > 180) = 0'0582$

12. Un profesor realiza un test de cien items a un curso con doscientos cincuenta alumnos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los alumnos siguen una distribución normal de media 64 puntos y desviación típica 10 puntos y denotando con $p(X \leq n)$ la probabilidad de obtener n puntos como máximo y con $p(X \geq n)$ la probabilidad de obtener al menos n puntos. Calcular: i) $p(X \geq 60)$, $p(X \leq 75)$, $p(30 \leq X \leq 60)$ ii) Número de alumnos que se espera que tengan al menos 45 puntos.

    Solución: i) $p(X \geq 60) = 65'5\,\%$, $p(X \leq 75) = 86'43\,\%$, $p(30 \leq X \leq 60) = 34'43\,\%$ $ii) 0'9713{,}250 \approx$ 243 alumnos

13. La cantidad de sustancia S, contenida en una dosis de cierta vacuna, se distribuye según un modelo normal de probabilidad con media 50 unidades. Se ha comprobado que la vacuna surte efecto (inmuniza) si la dosis administrada contiene una cantidad de S comprendida entre 46 y 54 unidades. Sabiendo que el 2'5 % de las dosis contiene una cantidad de S superior a 54 unidades:

    a) ¿Qué probabilidad hay de que un individuo al que se le administra una dosis elegida al azar no se inmunice?.

    b) Aproximadamente ¿cuánto vale la desviación típica?

    Solución: $N(50, \sigma)$, sabemos $p(S \leq 54) = 0'975, p(z \leq \frac{54-50}{\sigma}) = 0'975, z = 1'96, \sigma = 2'04$

    a) $p(46 < S < 54) = 0'95$, la probabilidad de que no se inmunice es del 0'05 % b) ya hallada.

14. En una carrera la media del tiempo empleado ha sido de 73 minutos y la desviación típica 7 minutos. Se elimina al 5 % de los corredores. A partir de qué tiempo queda eliminado un corredor.

Solución: 84'48 %

15. Una máquina ha producido 1.000 varillas de en teoría 1 m de longitud, con una desviación típica de 8 mm. ¿Entre qué medidas estará el 90 % de las varillas más exactas?.

    Solución: N(1000,8)) $p(-a < z < a) = 0'90$, $p(z \leq a) = 0'95$, $a = 1'65$, $x_a = 1013'2$ hay que tomarlas entre 986'8 y 1013'2

Tema 9

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL. ESTIMACIÓN ESTADÍSTICA

9.1. Muestreo

Colectivo o población es el conjunto de elementos con alguna característica común.

Muestra es un subconjunto o parte representativa de un colectivo.

Muestreo es la operación de seleccionar los elementos de la población que van a constituir la muestra.

Puede ser **aleatorio** si se eligen al azar, **estratificado** si se divide la población en clases y en cada una se elige un número de elementos en la proporción conveniente, para que la muestra reproduzca de forma adecuada los caracteres de la población.

Ejemplos

- Tres amigos hacen una quiniela poniendo respectivamente 3, 6 y 9 euros, les tocan 60.300 euros. Repartirlos proporcionalmente.

$$\left.\begin{array}{r}3\\6\\9\end{array}\right\} \quad 18; \quad \frac{60300}{18} = 3350 \quad \text{por cada euro, luego reciben} \quad \left\{\begin{array}{l}3350 \times 3 = 10050\\3350 \times 6 = 20100\\3350 \times 9 = 30150\end{array}\right.$$

- En un país, el porcentaje de declaraciones fiscales que son incorrectas es del 40 %, 60 % y 20 %, según se trate de industriales, profesionales liberales o asalariados. Se sabe que del total de declaraciones, el 10 % son de industriales, el 20 % de profesionales liberales y el resto de asalariados. Se van a realizar 1500 inspecciones:

  a) ¿Cuántos industriales, profesionales liberales y asalariados han de ser inspeccionados, si se desea que la inspección sea proporcional a la probabilidad de declaración incorrecta en cada categoría profesional?

b) Compara esta distribución de las 1500 inspecciones con la que se tendría en el caso de hacerla proporcional al número de declaraciones de cada categoría.

Sea I: industrial, L: liberal, A: asalariado, M: declaración incorrecta:

a)

declaración incorrecta	40 %	60 %	20 %
	I	L	A
total declaraciones	10 %	20 %	70 %
inspecciones	1500		

$$\begin{array}{r} p(I\cap M)=0'1\cdot 0'4=0'04\\ p(L\cap M)=0'2\cdot 0'6=0'12\\ p(A\cap M)=0'7\cdot 0'2=0'14\\ \hline \text{Total: } 0'30\end{array} \qquad \frac{1500}{0'30}=5000 \quad \begin{cases} 5000\cdot 0'04=200\\ 5000\cdot 0'12=600\\ 5000\cdot 0'14=700\end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{l} I=0'1\\ L=0'2\\ A=0'7\end{array} \qquad \frac{1500}{1}=1500 \quad \begin{cases} 1500\cdot 0'1=150\\ 1500\cdot 0'2=300\\ 1500\cdot 0'7=1050\end{cases}$$

La **teoría de muestreo** es el estudio de las relaciones existentes entre una población y muestras extraídas de ella. Los parámetros (media, etc) de la población se suelen llamar frecuentemente parámetros, los parámetros de una muestra se suelen llamar estadísticos muestrales o simplemente estadísticos.

9.2. Distribución muestral de medias. Teorema Central del Límite.

Si consideramos todas las posibles muestras de tamaño n de una población de media μ y desviación típica σ y la media de cada muestra $\bar{x}$ obtenemos una variable aleatoria $\bar{X}$ que asigna a cada muestra su media, se llama **distribución muestral de medias** y tendrá una media y una desviación típica. .

Ejemplo Una población se compone de los cinco números 2,3,6,8,11. Considerar todas las muestras posibles de tamaño dos que pueden extraerse con reemplazamiento de esta población. Hallar: a) la media y la desviación típica de la población, b) las muestras de tamaño dos y sus medias, c) la media de la distribución muestral de medias y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

a) $\mu=\frac{2+3+6+8+11}{5}=6 \quad \sigma^2=\frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5}=\frac{234}{5}=10'8; \quad \sigma=3'29$

b) Hay $5^2=25$ muestras de tamaño 2 Las correspondientes medias muestrales son:

$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,6)$	$(2,8)$	$(2,11)$
$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,6)$	$(3,8)$	$(3,11)$
$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,6)$	$(6,8)$	$(6,11)$
$(8,2)$	$(8,3)$	$(8,6)$	$(8,8)$	$(8,11)$
$(11,2)$	$(11,3)$	$(11,6)$	$(11,8)$	$(11,11)$

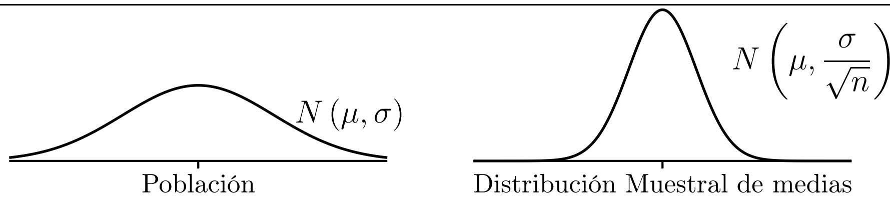
2	2'5	4	5	6'5
2'5	3	4'5	5'5	7
4	4'5	6	7	8'5
5	5'5	7	8	9'5
6'5	7	8'5	9'5	11

c) Introducidos estos números en la calculadora resulta:
La media de la distribución muestral de medias es 6.
La desviación típica de la distribución muestral de medias es $2'32$.

En general se tiene:

Teorema Central del Límite .

Para **población normal o muestra grande** ($n \geq 30$), si μ, σ son los parámetros de la población entonces:
la **distribución muestral de medias** $\bar{X}$ es normal $\boxed{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$



Ejemplo El peso de las naranjas de un campo se distribuye normalmente con media 180 gr y desviación típica 25 gr. Hallar:

a) La probabilidad de que al coger una naranja pese menos de 190 gr.

b) La probabilidad de que en una muestra de 16 naranjas la media de la muestra sea menor que 190 gr.

c) Si cogemos 100 naranjas ¿cuántas de ellas pesarán menos de 190 gr?

d) Si cogemos 100 muestras de 16 naranjas ¿en cuántas de ellas confiamos que la media sea menor que 190?

e) ¿Entre que valores alrededor de la media 180 gr estará el 95 % de las naranjas.?

f) ¿Entre que valores alrededor de la media 180 gr estará la media de una muestra de 16 naranjas con probabilidad 0'95.?

a) Es problema elemental de normal $N(180, 25)$

$p(X < 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{190-180}{25} = 0'4 \right\} = p(Z < 0'4) = 0'6554,$

b) Es problema de muestreo. Como la distribución de partida es normal, aunque la muestra es de tamaño menor que 30, la distribución muestral de medias $\bar{X}$ es normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(180, \frac{25}{\sqrt{16}}\right) = N(180, 6'25)$

Entonces: $p(\bar{X} < 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\text{desv. tip.}} = \dfrac{190-180}{6'25} = 1'6 \right\} = p(Z < 1'6) = 0'9452$

c) Se relaciona con a):

número de naranjas con menos de 190 gr $= 100.p(X < 190) = 100 \cdot 0'6554 \approx 65$ naranjas.

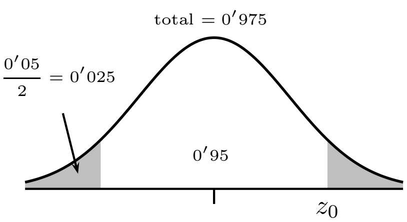
d) Se relaciona con b):

número de muestras con media menor de 190 gr : $p(\bar{X} < 190),100 = 0'9452,100 = 94'52$, entre 94 y 95 de las cien de las muestras.

e) $p(180 - k < X < 180 + k) \leq 0'95$

Mirando las tablas: z_0 verificando $p(Z \leq z_0) = 0'95 + 0'05/2 = 0'975$, es $z_0 = 1'96$, destipificando $180 \pm 1'96 \cdot 25 = 180 \pm 49 = \begin{cases} = 131 \\ = 229 \end{cases}$

Por tanto el 95 % de las naranjas pesará entre 131 gr y 229 gr.



f) El cambio de variable para tipificar es $z = \dfrac{x-\mu}{\text{des. tip.}}$

En nuestro caso: $z = \dfrac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, despejando x queda

$x - \mu = z.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad x = \mu + z.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Mirando las tablas: z_0 verificando $p(Z \leq z_0) = 0'95 + 0'05/2 = 0'975$, es $z_0 = 1'96$, destipificando $180 \pm 1'96 \dfrac{25}{\sqrt{16}} = 180 \pm 12'25 = \begin{cases} = 167'75 \\ = 192'25 \end{cases}$

Por tanto: el 95 % de las medias de las muestras de 16 naranjas estará entre 167'75 gr y 192'25 gr.

9.3. Estimación estadística

En los apartados anteriores se vio como la teoría de muestreo podía emplearse para obtener información acerca de muestras extraídas al azar de una población conocida.

La estimación hace un proceso inverso, aproxima un parámetro de una población a partir de una muestra.

Si, por ejemplo, se estima la media de la población por la media de la muestra se ha hecho estimación puntual. Si lo que se da es un intervalo en el que cabe con cierta probabilidad que esté la media se ha hecho estimación por intervalo de confianza.

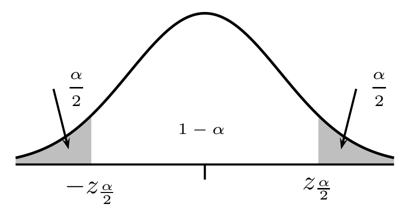
Por lo visto antes cabe afirmar: conocidos los parámetros poblacionales, que, por ejemplo, con un 95 % de confianza la media de una muestra está en un intervalo de la media poblacional. Recíprocamente conocida una muestra puedo afirmar, con un 95 % de confianza, que la media poblacional estará en un intervalo equivalente de la media de la muestra.

9.4. Estimas por intervalos de confianza

Supongamos que queremos estimar el valor de un parámetro poblacional por intervalo de confianza, se trata de encontrar un intervalo en el que esté el parámetro de la población con una probabilidad determinada $1-\alpha$ que se llama **nivel de confianza**.

Al resto de probabilidad α se le llama **nivel de significación**.
Las distribuciones muestrales que usaremos serán normales.
Al valor de la variable normal tipificada que nos da los extremos del intervalo de confianza $z_{\frac{\alpha}{2}}$ se le llama **valor crítico**.[a]

nivel confianza $1-\alpha$	valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$
0'90	1'65
0'95	1'96
0'99	2'58



[a]Se puede pedir para otros porcentajes distintos de 90 %, 95 % 99 %

Intervalo de confianza para la media μ Los datos son: $\bar{x}, \sigma, n$.

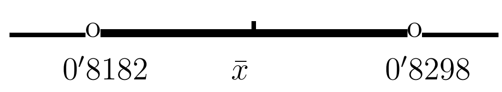
Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ con el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ correspondiente al nivel de confianza $1-\alpha$

Si en vez de σ lo que conocemos es s la desviación típica de la muestra, y n es grande (habitualmente se toma $n \geq 30$) en la expresión anterior se sustituye (estima) σ por s

Ejemplo Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 cojinetes de bolas hechos por una determinada máquina durante una semana dieron una media de 0'824 cm y una desviación típica de 0'042 cm. Hallar el intervalo de confianza del 95 % para el diámetro medio de todos los cojinetes.

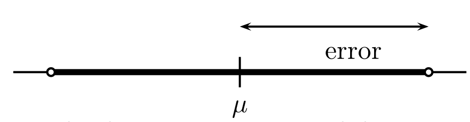
Los extremos del intervalo de confianza al(95 %)para la media μ son: $\bar{x} \pm 1'96 \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0'824 \pm 1'96 \dfrac{0'042}{\sqrt{200}} = 0'824 \pm 0'0058 = \begin{cases} = 0'8182\text{cm} \\ = 0'8298\text{cm} \end{cases}$ esto expresa que $p(0'8182 \leq \mu \leq 0'8298) = 0'95$

con probabilidad 95 % μ está en:



Error de la estima y tamaño muestral Error de estima o máximo error para un cierto nivel de confianza se define como la semiamplitud del intervalo:

para las medias: **error** $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$



Ejemplo Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0'05 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 99 % la confianza de que el error de su estima no excederá de 0'01 segundos?

El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 99 % por $2'58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0'01 entonces $2'58\dfrac{0'05}{\sqrt{n}} \leq 0'01$

Despejamos n, $2'58\dfrac{0'05}{\sqrt{n}} = 0'01$, $\quad \sqrt{n} = \dfrac{2'58 \cdot 0'05}{0'01} = 12'9 \quad n \geq 166'4$.

Así, pues, se tiene la confianza del 99 % de que el error de la estima será menor de 0'01 solamente si n es 167 o mayor.

9.5. Distribución muestral de proporciones

Ejemplo Un dado de quiniela tiene como reultados 1,X,2.

a) Hallar la proporción p de resultado numérico, es decir, salir 1 o 2 al tirar el dado.

Se consideran todas las muestras posibles de tamaño 3 que se pueden formar. Hallar:

b) Las posibles muestras de tamaño 3 y sus proporciones $\hat{p}$ de resultado numérico.

c) La media de la distribución muestral de proporciones y la desviación típica de la distribución muestral.

a) al tirar el dado los tres resultados tienen igual probabilidad $p = \dfrac{2}{3}$

b)

muestras			$\hat{p}$
1	1	1	1
1	1	X	2/3
1	1	2	1
1	X	1	2/3
1	X	X	1/3
1	X	2	2/3
1	2	1	1
1	2	X	2/3
1	2	2	1

muestras			$\hat{p}$
2	1	1	1
2	1	X	2/3
2	1	2	1
2	X	1	2/3
2	X	X	1/3
2	X	2	2/3
2	2	1	1
2	2	X	2/3
2	2	2	1

muestras			$\hat{p}$
X	1	1	2/3
X	1	X	1/3
X	1	2	2/3
X	X	1	1/3
X	X	X	0
X	X	2	1/3
X	2	1	2/3
X	2	X	1/3
X	2	2	2/3

$\hat{p}$	n^0 de veces
0	1
1/3	6
2/3	12
1	8

c) Operando obtenemos: Media = 2/3, Desviación típica: 0'27216

Que cumple:

Media de la distribución muestral de proporciones $= p = 2/3$

Desviación típica de la distribución muestral de proporciones $= \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})}{n}} = \sqrt{\dfrac{2}{27}} = 0'27216$

pero no es normal por ser muestra pequeña.

Distribución muestral de proporciones Supongamos que tenemos una población en la que una proporción p (por ejemplo 1/2, 87 %) de esa población cumple cierta característica (por ejemplo ser aficionado a los toros). Consideremos las muestras de tamaño n y para cada una de ellas la proporción $\hat{p}$ que tiene esa característica, se tiene entonces la v. a. $\hat{P}$ que a cada muestra le asigna su proporción, es la distribución muestral de proporciones que tiene de media $= p$ y desviación típica $= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

> Para las **muestras grandes** ($np > 5, \quad n(1-p) > 5$), donde p es la proporción de la población se tiene que:
>
> la **distribución de las proporciones de las muestras** $\hat{P}$ es normal $\boxed{N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)}$

Ejemplo Los resultados de una elección demostraron que un cierto candidato obtuvo el 46 % de los votos.

a) Determinar la probabilidad de que de 200 individuos elegidos al azar de entre la población votante se hubiese obtenido al menos un 50 % de votos para dicho candidato.

b) Si se hicieran 98 muestras de 200 individuos ¿en cuántas de ellas cabe esperar que saque mayoría el candidato?

Es $\hat{P}$ normal $N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right) = N\left(0'46, \sqrt{\dfrac{0'46 \cdot 0'54}{200}} = 0'0352\right)$

a) $p(\hat{P} \geq 0'5) = p(Z \geq \dfrac{0'50 - 0'46}{0'0352} \approx 1'13) = 1 - 0'8708 = 0'129$

b) Hemos visto que la probabilidad de que saque mayoría en una muestra de 200 es $0'129$. Entre las 98 muestras se puede esperar que en $98 \cdot 0'129 = 12'6 \approx 12$ muestras saque mayoría el candidato.

Intervalo de confianza para la proporción Los datos son: $\hat{p}, n$. Entonces los extremos del intervalo de confianza son: $\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ con el $z_{\frac{\alpha}{2}}$ correspondiente al nivel de confianza $1-\alpha$

nota: si no dan el valor de la proporción se supone 0'5.

Ejemplo Se selecciona una muestra de 400 habitantes de nuestra ciudad y se les pregunta si son del Madrid, responden afirmativamente 180. Calcular el intervalo de confianza al 90 % para la proporción de ciudadanos partidarios del Madrid.

Tenemos $\hat{p} = \dfrac{180}{400} = 0'45$ luego:

Los extremos del intervalo de confianza al(90 %)para la proporción p son: $\hat{p} \pm 1'65 \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$

$$0'45 \pm 1'65 \sqrt{\frac{0'45 \cdot 0'55}{400}} = 0'45 \pm 1'65 \cdot 0'0248 = 0'45 \pm 0'041 = \begin{cases} = 0'408 \\ = 0'491 \end{cases}$$

Error de la estima y tamaño muestral Error de estima o máximo o margen de error para un cierto nivel de confianza se define:

para las proporciones: **error** $= z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Ejemplo Se va a realizar una encuesta entre la población de nuestra comunidad autónoma mayor de edad. Si se admite un margen de error del 3 %, ¿a cuantas personas habrá que preguntar para un nivel de confianza del 99 %?

nota: cuando no se dice nada de la proporción se supone que es $0'5$

$2'58\sqrt{\dfrac{0'5\cdot 0'5}{n}} \leq 0'03; \quad 2'58\cdot\dfrac{0'5}{\sqrt{n}} \leq 0'03; \quad 2'58\cdot\dfrac{0'5}{0'03} \leq \sqrt{n}; n \geq 1849$

9.6. Problemas

1. Tres amigos invierten respectivamente 7, 3 y 5 euros en una quiniela. Aciertan y ganan 2000 euros. Repartir el premio proporcionalmente.

   Solución: $\frac{2000}{7+3+5} = 133'3; 933'1, 399'9, 666'5$

2. En un barrio se quiere hacer un estudio para conocer mejor el tipo de actividades de ocio que gustan más a sus habitantes. Para ello, van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar.

   a) Explica qué procedimiento de selección sería más adecuado utilizar: muestreo con o sin reposición. ¿Por qué?

   b) Como los gustos cambian con la edad y se sabe que en el barrio viven 2500 niños, 7000 adultos y 500 ancianos, más tarde se decide elegir la muestra anterior utilizando muestreo estratificado. Define los estratos y determina el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

   Solución: a) Sin reemplazamiento

   b) $\dfrac{A}{2500} = \dfrac{B}{7000} = \dfrac{C}{500} = \dfrac{100}{10000} \quad A = 25, B = 70, C = 5$

3. Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una normal de media 100 y varianza 729.

   a) Hallar la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.

   b) Hallar la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

   c) ¿Entre qué valores alrededor de la media 100 de coeficiente intelectual estará la media de una muestra de 25 alumnos con probabilidad 0'93?

   Solución: es de muestreo,a) 99'87 %, b) 2'28 % , c) $100 \pm 9'774$

4. Se supone que los ingresos diarios en una empresa siguen una distribución normal con media 400 euros y desviación típica 250 euros.

   1. ¿Cómo se distribuye la media muestral, para muestras de tamaño n?.

   2. Se dispone de una muestra aleatoria de 25 observaciones. Calcular la probabilidad de que el promedio de ingresos esté entre 350 y 450 euros.

   Solución: $0'6826$

5. La media de una población es 143 y la desviación típica 15. ¿Entre qué valores estará la media de una muestra de 39 individuos con probabilidad de 92 % ?

   Solución: $(138'8, 147'2$

6. El cociente intelectual (CI) de los alumnos de un centro se distribuye $N(110, 15)$. Nos proponemos extraer una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$.

   a. ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras que pueden extraerse?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del CI de los 25 alumnos de una muestra sea superior a 115?

   c. Dar el intervalo característico de las medias muestrales correspondientes a una probabilidad del 93 % ?.

   d) ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media poblacional no supere a 3 con un nivel de confianza del 87 %?

Solución:

a) $\bar{X}$ es normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(110, 3)$

b) $p(\bar{X} \geq 115) = 0'0485$

c) $(104'564, 115'435)$

d) $n > 57,31$

7. Se sabe que la desviación típica del peso de los individuos de una población es 6 kg. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de considerar para, con un nivel de confianza del 95 %, estimar el peso medio de los individuos de la población con un error inferior a 1 kg.

   Solución: error $n \geq 138'29$

8. Una máquina produce clavos de longitud media 80 mm con una desviación típica de 3 mm.

   a) ¿Cual es la probabilidad de que la longitud media de una muestra de 100 clavos sea superior a 81 mm?

   b) Si se toman 50 cajas de 100 clavos, ¿en cuántas cabe esperar que la longitud media esté comprendida entre 79 mm y 81 mm.

   Solución: es de distribución muestral, a) $p(\bar{X} > 81) = 0'0004$, b) $p(79 < \bar{X} < 81) = 0'9992$, habrá $0'9992{,}50 = 49'96 \approx 50$

9. En cierta población humana, la media muestral $\bar{X}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\bar{X}$ sea menor o igual a 75 es 0,58 y la de que $\bar{X}$ sea mayor que 80 es 0,04. Hallar la media y la desviación típica de la población. (Tamaño muestral n = 100).

   Solución: nivel de confianza: $\mu = 74'35, \sigma = 32'25$

10. Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es 100 horas. Calcula el tamaño de la muestra que se debe someter a prueba para tener una confianza del 95 % de que el error de la duración media que se calcula sea menor que 10 horas.

    Solución: error $n \geq 384'16$

11. El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviaci ón típica 1 segundo. A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0.2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?.

    Solución: $95'44\,\%$

12. Las estaturas de una muestra aleatoria de 50 estudiantes tienen una media de 174'5 cm; se conoce que la desviación típica de la variable estatura es 6'9 cm. Calcúlese un intervalo de confianza del 95 % para la estatura media de todos los estudiantes.

    Solución:

    IC(95 %):$\mu \in \bar{x} \pm 1'96\dfrac{s}{\sqrt{N}} = 174'5 \pm 1'96\dfrac{6'9}{\sqrt{50}} = 174'5 \pm 1'91, \quad (172'59, 176'41)$ cm

13. Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presentan a las pruebas de selectividad revela que la media de edad es 18'1 años. Halla un intervalo de confianza del 90 % para la edad media de todos los estudiantes que se presentan a las pruebas, sabiendo que la desviación típica de la población es 0'4.

    Solución:

Busquemos en $N(0,1)$ el valor de z_c correspondiente al 90 %: $p(z \leq z_c) = 0'95 \longrightarrow z_c = 1'65$,

IC(90 %):$\mu \in \bar{x} \pm 1'65\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 18'1 \pm 1'65\dfrac{0'4}{\sqrt{100}} = 18'1 \pm 0'066$

14. Se tiene una población $N(\mu, 2)$ y una muestra formada por 16 datos de media 2'5.

    a) Obtener el intervalo de confianza al 90 % para la media μ de la población.

    b) ¿Qué tamaño ha de tomar la muestra que permita estimar con un nivel de confianza del 95 % la media con un error de 0'2?

    Solución:

    a) Busquemos en $N(0,1)$ el valor de z_c correspondiente al 90 %: $p(z \leq z_c) = 0'95 = 1'65$,

    IC(90 %):$\mu \in \bar{x} \pm 1'65\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 2'5 \pm 1'65\dfrac{2}{\sqrt{16}} = 2'5 \pm 0'825$

    b) para el nivel de confianza del 95 %: el error es: $1'96\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$, entonces $1'96\dfrac{2}{\sqrt{N}} \leq 0'2, \quad N \geq 384'16$

15. Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

    95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110

    Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida:

    a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

    b) Determine el intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional.

    Solución: a) N(104; 1'25) b) (101'55; 106'45)

16. Se supone que la estatura de los chicos de 18 años de cierta población sigue una distribución normal de media 162 cm y desviación típica 12cm. Se toma una muestra al azar de 100 de estos chicos encuestados y se calcula la media.

    ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 159 y 165 cm?

    Solución: 0'9876

17. Un fabricante de electrodomésticos sabe que la vida media de éstos sigue una distribución normal con media m = 100 meses y desviación típica s = 12 meses.

    Determínese el mínimo tamaño muestral que garantiza, con una probabilidad de 0'98, que la vida media de los electrodomésticos en dicha muestra se encuentra entre 90 y 110 meses.

    Solución: al menos 8 electrodomésticos

18. Se selecciona aleatoriamente una muestra de 600 personas en una ciudad y se les pregunta si consideran que el tráfico en la misma es aceptablemente fluido. Responden afirmativamente 250 personas. ¿Cuál es el intervalo de confianza para la proporción de ciudadanos que en esa ciudad consideran aceptable la fluidez del tráfico, con un nivel de confianza del 90 %?

    (0,3836; 0,4498).

19. En una encuesta realizada a 800 personas elegidas al azar del censo electoral, 240 declararon su intención de votar al partido A.

    a) Estima con un nivel de confianza del 95'45 % entre que valores se encuentra la intención de voto a dicho partido en todo el censo.

b) Discute razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

a) (0,268; 0,332)

b) Si se quiere aumentar el nivel de confianza, la amplitud del intervalo se hace mayor.

20. Para estimar la proporción de habitantes de una ciudad que poseen ordenador personal se toma una muestra de tamaño n. Calcula el valor mínimo de n para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el error de estimación no supera el 2 %. (Como se desconoce la proporción, se ha de partir del caso mas desfavorable, que será 0,5.)

    El tamaño muestral debe ser de mas de 2401 habitantes.

21. Para estimar la proporción de familias de una determinada ciudad que poseen microondas, se quiere utilizar una muestra aleatoria de medida n. Calcula el valor mínimo de n para garantizar que, a un nivel de confianza del 95 %, el error en la estimación sea menor que 0'05. (Como se desconoce la proporción, se ha de tomar el caso mas desfavorable, que será 0'5.)

    El tamaño muestral sera: n = 385 familias.

22. Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de la universidad, se encontró que un tercio hablaban el idioma inglés.

    a) Halla, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de alumnos que hablan el idioma inglés entre los alumnos de la universidad.

    b) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01 con el mismo nivel de confianza del 90 %. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

    Solución: a) (0'23; 0'43)

    b) El tamaño muestral ha de ser al menos de 6050 alumnos.

23. En el juzgado de cierta ciudad se presentaron en el año 2005 un total de 5500 denuncias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 5 % de ellas. Entre las denuncias seleccionadas se determinó que 55 habían sido producidas por violencia doméstica. Determina, justificando la respuesta:

    a) La estimación puntual que podríamos dar por el porcentaje de denuncias por violencia doméstica en esa ciudad en el año 2005.

    b) El error máximo que cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 99 %.

    Solución: a) 20 %.

    b) error= 6'2 %.

24. El intervalo de confianza para la proporción al 95 % a partir de una muestra, resulta el intervalo $(0'3, 0'6)$. Hallar la proporción de la muestra y el tamaño de la muestra.

    Solución: $n \approx 42$

25. a) El intervalo de confianza para la proporción a partir de una muestra de tamaño 100, resulta el intervalo $(0'4, 0'9)$. Hallar el nivel de confianza en el que se trabaja:

    b) El mismo enunciado con el intervalo (0'6,0'7)

    Solución: a) 100 % , b) 70'62 %