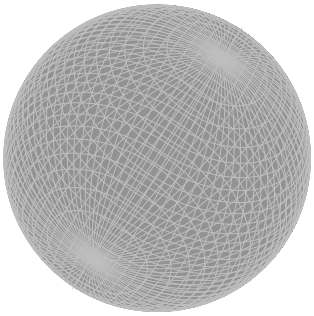
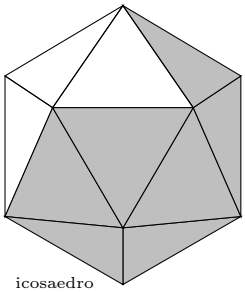
2ºBACHILLERATO

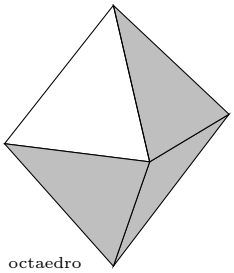
MATEMÁTICAS II

$$e^{\pi\, i} + 1 = 0$$

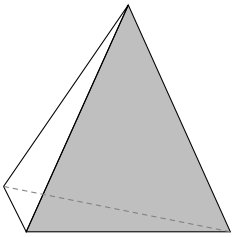




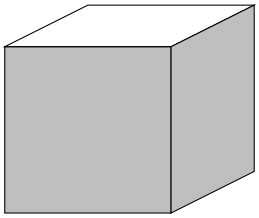
icosaedro



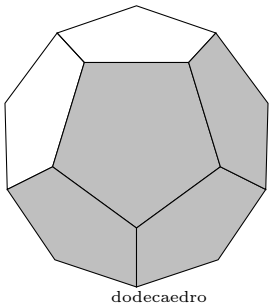
octaedro



tetraedro



cubo



dodecaedro

11 de julio de 2022

Germán Ibáñez

http://www.otrapagina.com/matematicas

Índice general

1. FUNCIONES CONTINUAS **1**
1.1. Función real . . . 1
1.2. Límite de una función en un punto . . . 1
1.3. Cálculo de límites de funciones . . . 3
1.4. Continuidad de funciones . . . 6
1.5. Problemas . . . 11

2. FUNCIONES DERIVABLES **15**
2.1. Derivada de una función en un punto . . . 15
2.2. Interpretación gráfica de la derivada . . . 15
2.3. Función derivada . . . 17
2.4. Estudio práctico de la derivabilidad de una función . . . 17
2.5. Diferencial de una función . . . 19
2.6. Regla de L'Hôpital . . . 19
2.7. Estudio local de una función . . . 20
2.8. Signo de la función, puntos de corte y asíntotas de una función racional . . . 23
2.9. Representación gráfica de funciones . . . 24
2.10. Problemas de máximos y mínimos . . . 27
2.11. Problemas . . . 30

3. INTEGRALES **35**
3.1. Primitiva de una función . . . 35
3.2. Tabla de primitivas inmediatas . . . 36
3.3. Integración de funciones compuestas . . . 37
3.4. Integración por partes . . . 39
3.5. Integración por descomposición . . . 40
3.6. Primitivas por cambio de variable . . . 42
3.7. Noción de integral definida . . . 44
3.8. Función integral definida. . . . 45
3.9. Teorema Fundamental del Cálculo Integral . . . 45
3.10. Regla de Barrow . . . 45
3.11. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas . . . 46

3.12. Problemas 49

4. ESPACIO VECTORIAL R^3. MATRICES. 55

4.1. Espacio vectorial de los vectores libres del espacio 55
4.2. Operaciones con vectores 55
4.3. Dependencia lineal 56
4.4. Matriz 58
4.5. Operaciones con matrices 59
4.6. Determinante de una matriz cuadrada 60
4.7. Propiedades de los determinantes 61
4.8. Menor y adjunto 63
4.9. Desarrollo de un determinante por adjuntos de una línea 63
4.10. Matriz inversa de una matriz cuadrada 64
4.11. Rango de una matriz 65
4.12. Cálculo práctico del rango 66
4.13. Problemas 70

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 73

5.1. Sistemas de ecuaciones lineales 73
5.2. Sistemas equivalentes. Método de Gauss de resolución de sistemas 74
5.3. Sistemas de Cramer 75
5.4. Teorema de Rouché-Fröbenius 76
5.5. Sistemas homogéneos 81
5.6. Independencia lineal, base. 82
5.7. Problemas 85

6. ESPACIOS AFÍN Y EUCLÍDEO 89

6.1. Espacio afín 89
6.2. Sistema de referencia 89
6.3. Subespacio afín 90
6.4. Producto escalar 90
6.5. Producto vectorial 92
6.6. Producto mixto 93
6.7. Ecuaciones del plano 93
6.8. Ecuaciones de la recta 95
6.9. Haz de planos 99
6.10. Incidencia de planos y rectas 99
6.11. Distancia entre dos puntos 102
6.12. Punto medio de un segmento 102
6.13. Distancia de un punto a un plano 103
6.14. Distancia de un punto a una recta 104

6.15. Angulos de rectas y planos 104
6.16. Minima distancia y perpendicular común a dos rectas 105
6.17. Problemas 109

7. PROBABILIDAD 115
7.1. Introducción 115
7.2. Sucesos 115
7.3. Frecuencia de un suceso 116
7.4. Probabilidad 116
7.5. Sucesos dependientes e independientes 119
7.6. Sistema completo de sucesos 123
7.7. Teorema de la probabilidad total 123
7.8. Teorema de Bayes 124
7.9. Problemas 126

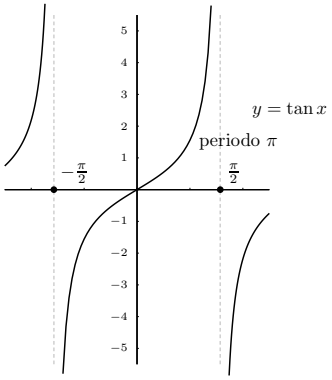
8. VARIABLES ALEATORIAS. DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL. 133
8.1. Variable aleatoria. Función de distribución de probabilidad 133
8.2. Relación entre variables estadísticas y aleatorias 134
8.3. Parámetros de una variable aleatoria discreta 134
8.4. Distribución binomial 135
8.5. Variable aleatoria continua 138
8.6. Función de densidad de probabilidad de una v.a. continua 138
8.7. Parámetros de una variable aleatoria continua: 139
8.8. Distribución normal 140
8.9. Aproximación normal de la distribución binomial 143
8.10. Problemas 147

Capítulo 1

FUNCIONES CONTINUAS

1.1. Función real

Función real de variable real es una aplicación que transforma números reales en números reales. Al conjunto original (valores de x), se le llama campo de existencia o **dominio** (si no se especifica es el mayor posible, los valores de x para los que la función tiene sentido).



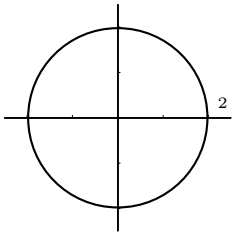
Ser aplicación exige que todo elemento tenga una imagen y sólo una.

Se suelen representar por $y = f(x)$.

Ejemplos Decir cuales son los dominios de las funciones:

- $f : [-1, 3] \longrightarrow R/ \quad f(x) = 5x^2+3$; tiene por dominio $[-1, 3]$
- $f(x) = \tan x$; tiene por dominio R menos los puntos en que se va a infinito es decir los de la forma

  $x = K\pi + \pi/2, K \in Z$
- La circunferencia: $f(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$ no es función.



1.2. Límite de una función en un punto

Idea de límite de una función en un punto Trata del valor al que se acercan las imágenes cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor x_0. Lo normal es que las imágenes se acerquen a la imagen de x_0, pero no siempre es así.

Una función $y = f(x)$ tiene por límite a L cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, entonces la y se acerca a L.

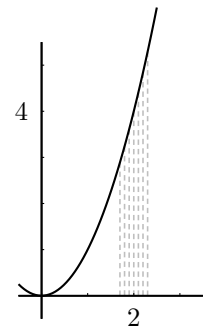
Esto se escribe : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

que se lee: "límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es igual a L.

Ejemplos Estudiar los límites siguientes

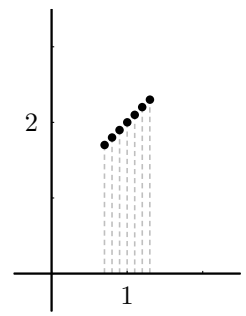
La función $y = x^2$ cuando $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ \hline y & 3'61 & 3'96 & 3'99 \\ x & 2'1 & 2'01 & 2'001 \\ \hline y & 4'41 & 4'04 & 4'004 \end{array} \right\} = 4$$



La función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando $x \to 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 0'9 & 0'99 & 0'999 \\ \hline y & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ x & 1'1 & 1'01 & 1'001 \\ \hline y & 2'1 & 2'01 & 2'001 \end{array} \right\} = 2$$

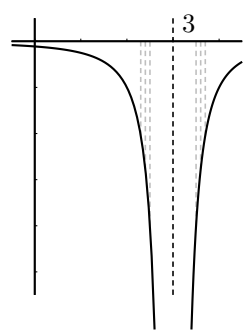


"Límite infinito" Las imágenes se alejan a infinito, no hay límite la función se va a infinito:

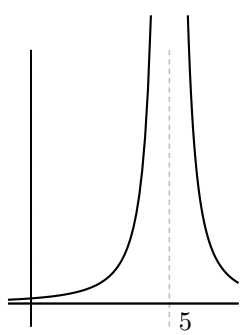
(nota: **asíntota** es una recta a la cual se acerca la función en el infinito).

Una función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, la y se hace enormemente grande, hay asíntota vertical.

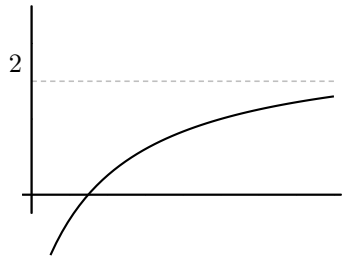
$$\lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 2'5 & 2'7 & 2'9 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \\ x & 3'5 & 3'3 & 3'1 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \end{array} \right\} = -\infty$$



$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$$



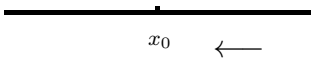
Límite cuando x tiende a infinito:



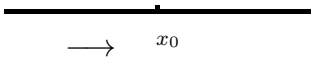
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{x+2} = 2;$
si es un número hay asíntota horizontal;
Análogamente: límite cuando x tiende a $-\infty$

Límites laterales Resultan de acercarse x a x_0 sólo por uno de los lados:

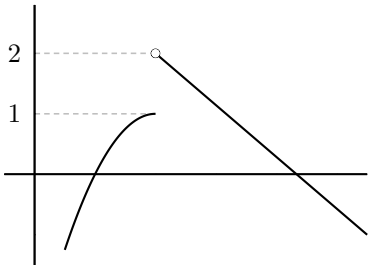
Si nos acercamos con valores mayores que x_0 se llama límite lateral por la derecha y se escribe: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.



Para la izquierda es $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

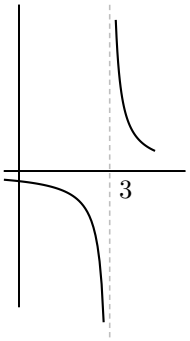


Una función tiene límite en un punto cuando los límites laterales coinciden.
En la figura:
-por la derecha: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 2$
-por la izquierda: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 1$
no tiene sentido hablar de límite en x_0.

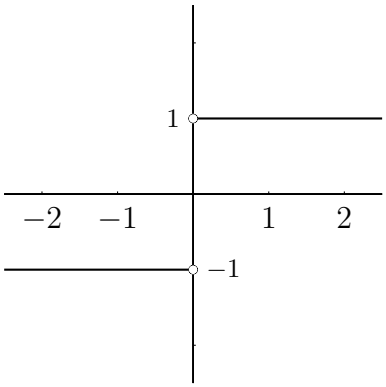


Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$



b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$



1.3. Cálculo de límites de funciones

1ª regla Sustituir la x por el valor al cual se acerca x_0. El número que resulta es el límite (salvo indeterminación). Ejemplos :

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 - 5 = 7; \qquad \lim_{x\to -\infty} 3x^2 - 5 = \infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x-5x^2}{6x-4} = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{5x+1}\right)^x = \left\{3^0\right\} = 1$$

2ª regla: Límite de un polinomio partido por otro polinomio

1. Cuando x tiende a infinito: Este límite se calcula a partir de las mayores potencias que dan el orden del infinito.

   a) Cuando el grado del numerador es menor que el del denominador el denominador es más potente, el límite es 0.
   $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{x^2+1} = \text{dividiendo por x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-\frac{5}{x}}{x+\frac{1}{x}} = 0$

   b) Cuando el grado del numerador es igual que el del denominador son igualmente potentes, el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado.
   $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5}{7x^2+x} = \text{dividiendo por } x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-\frac{5}{x^2}}{7+\frac{1}{x}} = \dfrac{3}{7}$

   c) Cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador el numerador es más potente, el límite es $\pm\infty$. En este caso el signo del infinito se deduce del signo de los coeficientes de mayor grado del numerador y del denominador.
   $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{3x-5} = \text{dividiendo por x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\frac{1}{x}}{3-\frac{5}{x}} = \infty$

   d) También sirve para cocientes con raíces:
   $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\sqrt{3x^5-6x}}{2x^2-4x^3} = \dfrac{\infty}{-\infty} = 0$

   Nota : Para hallar el grado de una raíz se divide el mayor grado por el índice.

2. Cuando x tiende a menos infinito es igual que cuando x tiende a infinito. Sólo hay que preocuparse del signo cuando el límite resulta infinito.

   Ejemplo: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{8x-1} = -\infty$

3. Cuando x tiende a 0 el límite se calcula sacando factor común y simplificando.

   Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(3x-5)}{x(3+10x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-5}{3+10x^2} = -\dfrac{5}{3}$

   Ejemplo: Si sale infinito, para saber el signo, en este caso hay que hallar los límites laterales.
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{0}\right\} = \pm\infty$

   $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{0^-}\right\} = \infty; \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{0^+}\right\} = -\infty$

4. Cuando x tiende a a, siendo a un número distinto de 0:

   Ejemplos: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x+4} = \left\{\dfrac{0}{6}\right\} = 0; \quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+5}{x^2-4} = \left\{\dfrac{11}{0}\right\} = \pm\infty$

   Para saber el signo del infinito del último ejemplo hay que hacer los límites laterales.

Cuando resulte indeterminación lo resolveremos por L'Hôpital cuando demos derivadas. De momento se puede hallar descomponiendo en factores y simplificando.

3ª regla: Indeterminación " $\infty - \infty$ " Si hay raíces se multiplica y se divide por el conjugado.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}-\sqrt{2x^2+5x}\right)=\infty-\infty=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-3x+1}-\sqrt{2x^2+5x}\right)\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{2x^2+5x}\right)}{\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{2x^2+5x}}=\text{suma por diferencia es diferencia de cuadrados}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2+5x}\right)^2}{\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{2x^2+5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1-2x^2-5x}{\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{2x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{2x^2+5x}}=\frac{-\infty}{\infty}=\frac{-8}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{-8}{2\sqrt{2}}=\frac{-4}{\sqrt{2}}$$

4ª regla:Indeterminación " 1^∞ " Esta indeterminación se resuelve mediante la fórmula :

$$\boxed{\lim_{x\to\ldots}\cdots=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\ldots}(\text{exponente}\times(\text{base}-1))}}$$

Ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{2x^2-6}\right)^{\frac{x^2}{1+x}}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x}.\left(\frac{2x^2+3x}{2x^2-6}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3\cdots}{2x^3\cdots}}=e^{\frac{3}{2}}$

Recordemos que el límite de la suma, resta, producto o cociente(si no se anula el denominador), es la suma, resta, producto o cociente de los límites.

Ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)=\{\infty\cdot(1-1)=\infty\cdot 0\}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\frac{2}{x-1}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}=$$

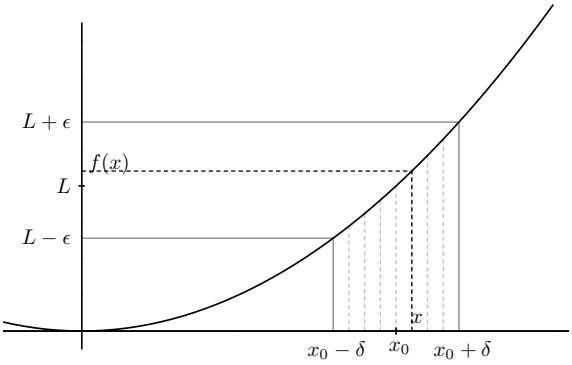
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}=\text{Donde el numerador y el denominador de la fracción principal tienen límite:}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$

Definición de límite de una función en un punto Sea la función f definida en un intervalo que contiene a x_0, pudiendo no existir $f(x_0)$, entonces:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ si y solo si $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0/$ si x verifica $0<|x-x_0|<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\epsilon$

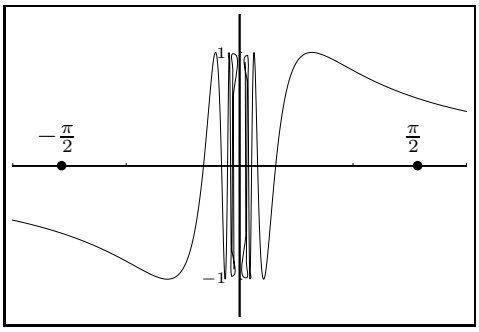
Es decir cuando x se acerca a x_0 entonces $f(x)$ se acerca a L. O lo que es lo mismo dado un entorno de L, existe un entorno de x_0 de manera que si tomamos un elemento x de este último, su imagen $f(x)$ está en el entorno de L.

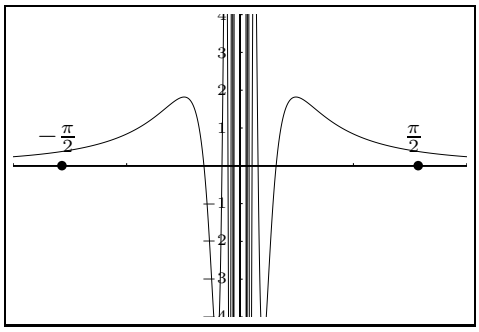
Observemos que la condición $0 < |x - x_0| < \delta$ expresa que x dista de x_0 menos de δ pero no llega a ser igual a x_0.

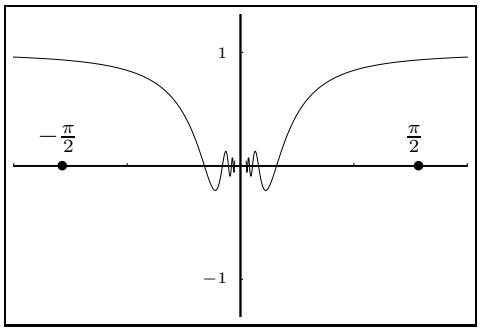


Ejemplo Ver qué límites de los siguientes existen:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} \qquad \lim_{x\to 0} x.\operatorname{sen} \frac{1}{x}$$







1.4. Continuidad de funciones

Una función es continua cuando su gráfica es continua, no da saltos.

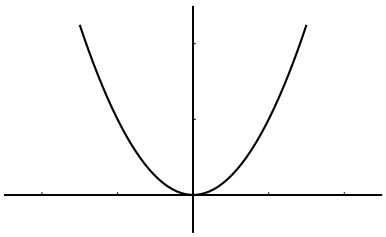
Definición de función continua en un punto Una función $f(x)$ es continua en un punto (no aislado) x_0, cuando el límite de la función en x_0 es igual al valor de la función en x_0; es decir:

Una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 cuando los límites laterales son iguales a $f(x_0)$:

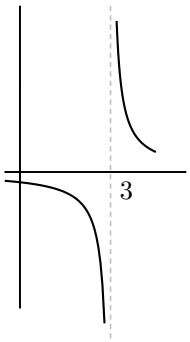
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \end{array}\right\} = f(x_0)$$

Ejemplos Se describe que ocurre en el punto:

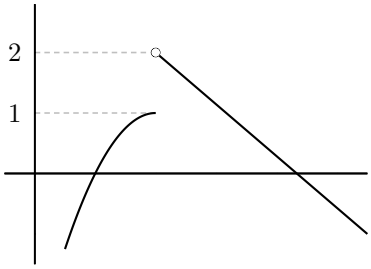
$y = x^2$ es continua siempre.



$y = \dfrac{1}{x-3}$ es discontinua en $x = 3$ con salto infinito.



La función presenta una discontinuidad de salto finito



Función continua Una función se dice que es continua en un conjunto cuando es continua en todos los puntos de ese conjunto.

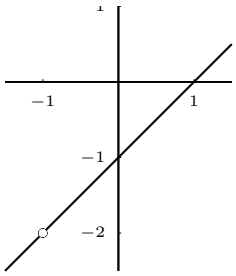
La suma y resta, el producto, el cociente (para puntos que no anulen al denominador) y la composición de funciones continuas es continua.

Las funciones polinómicas son continuas en cualquier punto, en consecuencia las funciones racionales son continuas excepto en puntos que anulen al denominador.

Ejemplos Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

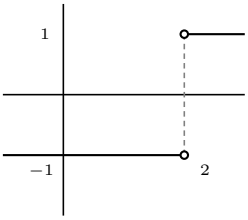
   Como es una función racional es continua siempre salvo donde se anule el denominador que es en $x = -1$ donde vamos a estudiarla:
   $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} =$
   (simplificando queda:) $= \lim\limits_{x\to -1^+} (x-1) = -2$
   de la misma forma por la izquierda:
   $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-1}{x+1} = -2$
   No existe $f(-1)$.
   Hay discontinuidad evitable en $x = -1$
   (se llama así porque se puede hacer continua la función sin más que definir $f(-1) = -2$.



2. $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Como es una función resultante de operaciones entre funciones continuas es continua siempre salvo donde se anule el denominador que es en $x = 2$ donde vamos a estudiarla:

Primero escribimos la función a trozos:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} = 1 & si \quad x > 2 \\ \text{no existe} & si \quad x = 2 \\ \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 & si \quad x < 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$ en $x = 2$ hay discontinuidad inevitable de salto finito.

3. $y = \begin{cases} x^2 - 7x & si \quad x \leq -1 \\ 3 - 5x & si \quad -1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-5} & si \quad x > 3 \end{cases}$

Es continua siempre salvo quizá donde se parte el dominio o se anula el denominador que es en $x = -1, x = 3, x = 5$ donde vamos a estudiarla:

- En $x = -1$
  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 - 7x) = 8$
  $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (3 - 5x) = 8$
  $f(-1) = (-1)^2 - 7(-1) = 8$, luego sí es continua en $x = -1$
- En $x = 3$
  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (3 - 5x) = -12$
  $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{1}{3-5} = \dfrac{1}{-2}$
  Luego en $x = 3$ hay discontinuidad de salto finito.
- En $x = 5$
  $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{1}{x-5} = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x-5} = +\infty$
  Luego en $x = 5$ hay discontinuidad de salto infinito.

4. $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-3x}$

Como es una función racional es continua siempre salvo donde se anule el denominador que es en $x = 0, x = 3$ donde vamos a estudiarla:

En $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-6}{x^2-3x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x-6}{x^2-3x} = -\infty$

en $x = 0$ hay discontinuidad de salto infinito.

En $x = 3$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-6}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{3}$

De la misma forma: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x-6}{x^2-3x} = \dfrac{2}{3}$

Por otro lado $f(3)$ no existe.

en $x = 3$ hay discontinuidad evitable.

5. Hallar a y b para que la siguiente función sea continua:

$$y = \begin{cases} x^2 + a & si \quad x \leq 0 \\ bx + 6 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ e^{-\frac{1}{x-2}} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

En $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} e^{-\frac{1}{x-2}} = \{e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}}\} = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (bx+6) = 2b+6$

luego ha de ser $2b + 6 = 0; b = -3$ para que sea continua en $x = 2$

En $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-3x+6) = 6$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2+a) = a$

luego ha de ser $a = 6$ para que sea continua en $x = 0$

6. $y = \dfrac{2x^2 + |x|}{x}$

Esta función se puede expresar

$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x}{x} = 2x+1 & si \quad x > 0 \\ \text{no existe} & si \quad x = 0 \\ \frac{2x^2-x}{x} = 2x-1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ es continua $\forall x \neq 0$ por ser cociente de funciones continuas, veamos que pasa en $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x-1) = -1$

en x=0 hay discontinuidad de salto finito.

7. $f(x) = \begin{cases} x.\operatorname{sen}\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ es continua $\forall x \neq 0$ por resultar de operaciones de funciones continuas, veamos que pasa en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x.\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \left\{\begin{array}{l}\text{como sen}\frac{1}{x}\text{ está comprendido entre -1 y 1 ,}\\ \text{al multiplicarlo por algo que tiende a 0 tiene}\\ \text{por límite 0}\end{array}\right\} = 0$$

luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ por tanto $f(x)$ es continua también en $x = 0$

1.5. Problemas

1. Hallar las imágenes por $f(x) = 3x^2 - 1$

   a) de 5; b) de -1; c) de h ;

   d) de $(x_0 + h)$; e) de $\frac{x+5}{7}$

   Solución: a) 74, b)2, c) $3h^2 - 1$, d) $3(x_0 + h)^2 - 1$, e) $3\left(\frac{x+5}{7}\right)^2 - 1$

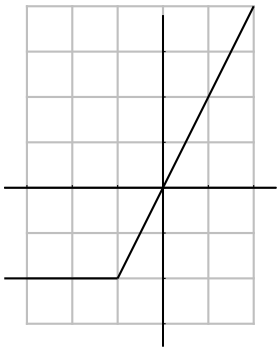
2. Hallar de quién es imagen por la función $y = x^2 + 2x - 15$

   a) y $= 0$; b) y $= -11$ c) y $= -15$

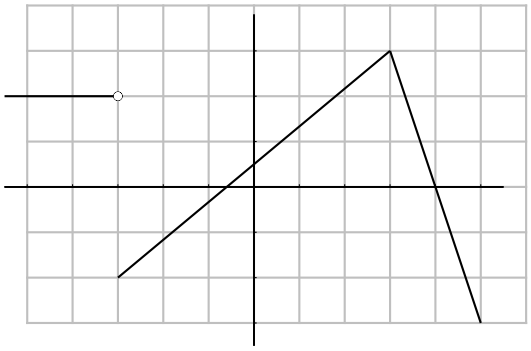
   Solución: a) $3, -5$, b) $-1 \pm \sqrt{5}$, c) $0, -2$

3. Representar $f(x) = \begin{cases} 3 - x & si \quad x \leq 3 \\ 2x - 6 & si \quad 3 < x \leq 5 \\ 4 - x & si \quad 5 < x \end{cases}$

4. Hallar la expresión de la función de gráfica



5. Hallar la expresión de la función de gráfica



6. Hallar el dominio de a) $y = \dfrac{2}{1 - 3x^2}$,

   b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

   Solución: a) R excepto $\pm\sqrt{1/3}$, b) $]-2, 2[$

7. Se quiere construir un pozo en forma cilíndrica de 2 m de diámetro. Expresar el volumen de agua que cabe en el pozo en función de su profundidad.

   Solución: $f(x) = \pi.x$

8. Sabiendo que el cambio actual del dólar está a 110 rupias y que el banco cobra una comisión del 0'5 %, escribir las funciones que permiten pasar del valor actual de una moneda a otra.

   Solución: Cambio de rupias a \$, $y = \frac{x - 0'005x}{110}$; cambio de \$ a rupias $y = (x - 0'005x)$,110

9. Representar a) $f(x) = |x^2 - 3x|$,

   b) $g(x) = x^2 - 3|x| + 2$

10. En una máquina de calcular programable el programa B multiplica por 2 la cantidad introducida y le suma 1. Hallar el resultado de aplicar 4 veces el programa B.

    Solución: $B(B(B(B(x)))) = 16x + 15$

11. Representar

    $$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 6 & si \quad -2 < x \leq 4 \\ -x - 1 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

12. Dadas las funciones

    $f(x) = \dfrac{3x + 2}{5}$; $\quad g(x) = 6x^2 - 1$. Hallar:

    a) $f.g$; b) $f \circ g$; c) $g[f(x)]$;

    d) $f^2 - g$; e) f^2/g

    Solución: a) $\frac{18x^3 + 12x^2 - 3x - 2}{5}$, b) $\frac{18x^2 - 1}{5}$,

    c) $\frac{54x^2 + 72x - 1}{25}$, d) $\frac{141x^2 + 12x + 29}{25}$, e) $\frac{9x^2 + 12x + 4}{150x^2 - 25}$

13. Dadas las funciones
$f: \quad y = \dfrac{5-3x}{x-7}; \quad g: \quad y = x^2$. Hallar:
a) $f \circ g$; b) imagen de $3+h$ por $g \circ f$; c) inversa de f
Solución: a) $\frac{5-3x^2}{x^2-7}$, b) $\left(\frac{-4-3h}{h-4}\right)^2$, c) $\frac{7x+5}{x+3}$

14. Decir si los puntos siguientes:
$(2,3), (1,-1), (4,-3), (t, 6t-7)$; pertenecen a la gráfica de la función $y = 6x-7$. Dibujar y escribir su función inversa.

15. Representar $y = |2x+1|$

16. Dadas las funciones
$f: \quad y = \dfrac{5-3x}{x-7}; \qquad g: \quad y = \sqrt{x}$.
Hallar:
a) $f \circ g$; b) inversa de f ; c) inversa de g ; d) gráficas de g y g^{-1}

17. Representar: $y = |(x-3)(x+1)|$

18. Representar: $y = (x-2)(5+|x|)$

19. Hallar la función suma de las funciones
$$f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad 0 \le x \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x<2 \\ 3 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$
Solución: $(f+g)(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x<0 \\ x+1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ 2x+3 & si \quad 2 \le x \end{cases}$

20. Calcular por aproximación:
a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{-3}{(x-5)^2}$;
b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{(x^2-25)}$;
c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{7}{x^2-25}$;
d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$;

21. Calcular:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2+10}$;
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{3x+1}$;
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{70}{x^2}$;

22. Dada la función $\dfrac{x^2-5x+6x^3}{3x^2-5x-12x^3}$. Hallar:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
Solución: a) $-1/2$, b) $-1/2$, c) 1, d) 1

23. Siendo $f: y = x^2 - 3x$, hallar: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ Solución: 1

24. Calcular $\lim \dfrac{3x^2+5x}{x+1}$ cuando:
a) $x \to \infty$; b) $x \to -\infty$; c) $x \to 0$;

25. Calcular $\lim(x^3-3x+1000)$ cuando:
a) $x \to \infty$; b) $x \to -\infty$; c) $x \to 0$;

26. Calcular $\lim \left(5 - \dfrac{7}{x-2}\right)$ cuando:
a) $x \to \infty$; b) $x \to -\infty$; c) $x \to 2$;

27. Calcular $\lim(\sqrt{2x^2-5x} - \sqrt{2x^2+4})$ cuando $x \to \infty$
$\dfrac{-5}{2\sqrt{2}}$

28. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
$e^{-1/2}$

29. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
$\dfrac{1}{4}$

30. Siendo $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$, calcular $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

    $\dfrac{7}{2\sqrt{10}}$

31. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

    $e^0 = 1$

32. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ 4 + 2x & si \quad -3 \le x < 2 \\ 3x^2 - 4 & si \quad 2 \le x < 3 \\ 4 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

33. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad 0 \le x \le 2 \\ \frac{3x-2}{5-x} & si \quad 2 < x \end{cases}$$

34. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-3x^2+7x-2}{x^2-4} & si \quad x < 3 \\ \frac{x-3}{2-x} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

35. Hallar a y b para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2+1} & si \quad x < 0 \\ 2x - 7 & si \quad 0 \le x \le 4 \\ x^2 + bx + 1 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

    Solución: $a = -7, b = -4$

36. Estudiar las asíntotas de:

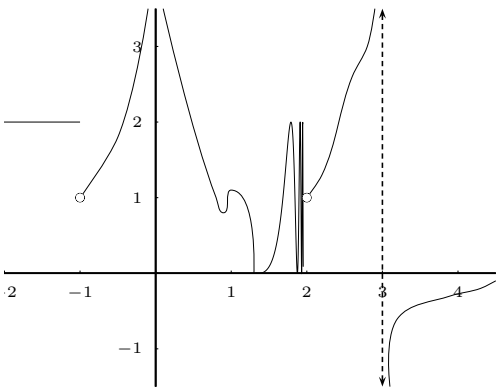
    a) $y = e^{-x}$

    b) $y = xe^{-x}$

    c) $y = \ln(x - 3)$

    d) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

37. Describir los puntos notables de la función de gráfica:



38. Representar gráficamente: $f(x) = \dfrac{8 - 2x}{3x + 6}$

39. Representar gráficamente: $f(x) = 5 + \dfrac{2}{3x}$

40. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = 0$

41. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3\,x + 1}{8\,x - 24} = -\infty$

42. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{3x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$

43. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 1$

44. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{4\,x - 1}{2\,x + 3}\right)^{\frac{x+5}{2}} = \frac{27}{125}$

45. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3\,x + 2} = 1$

46. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9\,x^2 + 4\,x - 2} - 3\,x}{2\,x - 1} = 0$

47. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{5 - 3\,x} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

48. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3\,x} - x}{3\,x + 1} = 0$

49. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3\,x^2 + 1}{3\,x^2 - 5\,x + 4}\right)^{x-2} = e^{\frac{5}{3}}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+3\,x}-x}{x} = \infty$

51. $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2-4}{x^2+3\,x+2} = 4$

52. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{4-3\,x} = -\frac{1}{3}$

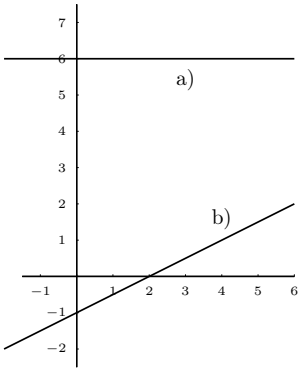
53. $\lim\limits_{x\to \infty} 1-\dfrac{x^2-4}{x^2+3\,x+2} = 0$

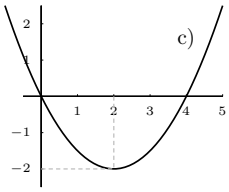
54. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2+7\,x-2}-x+1 = \frac{9}{2}$

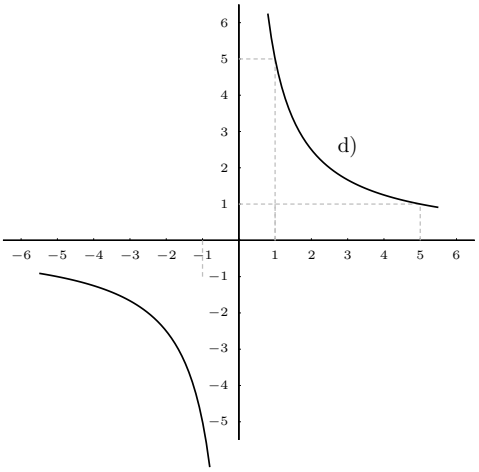
55. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{5\,x+1}{5\,x+3}\right)^{x+1} = e^{-\frac{2}{5}}$

56. Asociar a cada una de estas gráficas su expresión matemática (c es una parábola, y d una hipérbola):

Solución: I) $y=6$, II) $y=\frac{x-2}{2}$, III) $y=x^2/2-2x$, IV) $y=5/x$







Capítulo 2

FUNCIONES DERIVABLES

2.1. Derivada de una función en un punto

Sea una función real $f(x)$ definida en el dominio D, subconjunto de R. Se define derivada de la función $f(x)$ en el punto $x_0 \in D$ como:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

cuando este límite es un número.

Ejemplos Veamos si las funciones siguientes son derivables en los puntos que se indican

1. $y = x^2 + 3$ en $x_0 = 5$

   $$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 + 3 - (5^2 + 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{10h}{h} = 10$$

2. $y = |x + 3|$ en $x_0 = -3$

   $$f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|-3+h+3| - |-3+3|}{h} =$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \left| \begin{array}{lll} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1 & \text{si} & h > 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1 & \text{si} & h < 0 \end{array} \right. \quad \text{luego no existe } f'(-3).$$

   También se representa la derivada en x_0 por $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0}$

2.2. Interpretación gráfica de la derivada

Llamando a h incremento de x, $f(x_0 + h) - f(x_0)$ incremento de y, resulta:

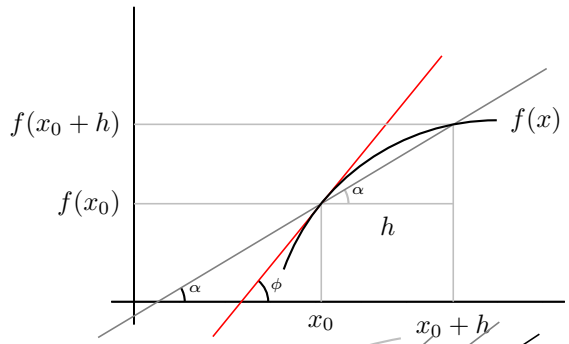
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \tan\alpha$$

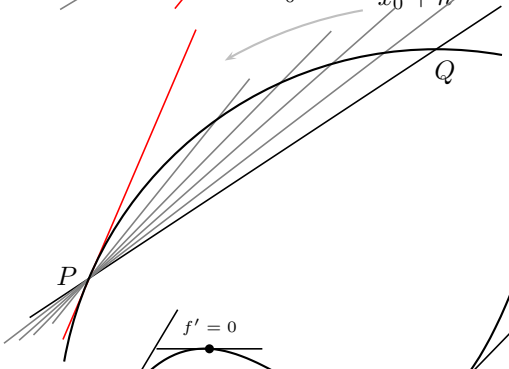
cuando $h \to 0$ la recta secante PQ tiende a la recta tangente en x_0 y los ángulos α tienden al ángulo ϕ, se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\alpha\to\phi} \tan\alpha = \tan\phi = m$$

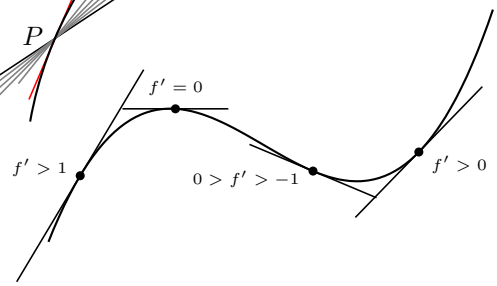
Se llama pendiente de una recta a la tangente del ángulo que forma con el eje de las x positivas. Por tanto:

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.





Por tanto la derivada de una función en un punto dice como crece una función y lo hace midiendo la inclinación de la recta tangente pues la derivada es la pendiente de la recta tangente.

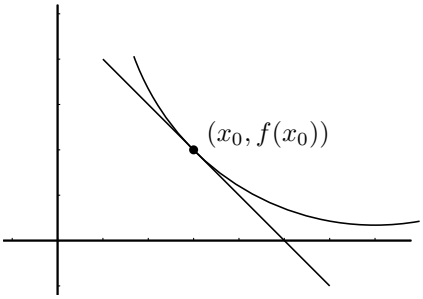


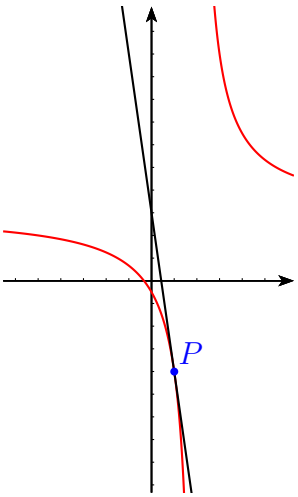
Cuanto mayor es la derivada en valor absoluto más vertical es la gráfica. Según sea positiva o negativa sube o baja.

Recta tangente y normal a una curva Como la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene de pendiente m es: $y - y_0 = m(x - x_0)$, si queremos calcular:

recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0, será: $\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ m = f'(x_0) \end{cases}$

recordemos también que la recta normal será por tanto de pendiente $\dfrac{-1}{m}$





Ejemplo: Hallar la recta tangente y la recta normal a la curva en el punto de abcisa $x = 1$.

$$y = \frac{3x+1}{x-2}$$

$$y_0 = f(1) = -4$$

$$f'(x) = \frac{3(x-2)-(3x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2}; \quad f'(1) = -7$$

La recta tangente es $y + 4 = -7(x-1)$; $\quad y = -7x + 3$

(Recordemos que la perpendicular a una recta de pendiente m tiene de pendiente $\dfrac{-1}{m}$).

La recta normal es $y + 4 = \frac{1}{7}(x-1)$; $\quad y = \frac{1}{7}x - \frac{29}{7}$

Relación entre derivabilidad y continuidad Si una función es derivable en x_0 necesariamente es continua en x_0.

La razón es que para que exista el límite que define la derivada necesariamente el numerador ha de tender a 0 cuando h tiende a 0, lo que expresa que es continua en x_0.

Derivadas laterales Resultan de acercarse al punto por un solo lado:

Derivada en x_0 por la derecha: $f'(x_0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

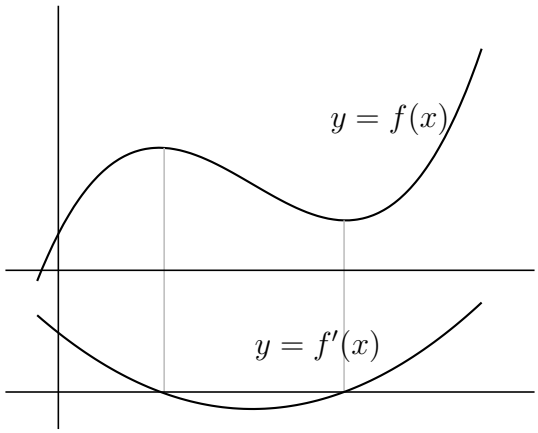
Derivada en x_0 por la izquierda: $f'(x_0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Una función es derivable si las derivadas laterales coinciden.

La suma, el producto, el cociente (cuando el denominador no se anula) y la composición de funciones derivables, es derivable.

2.3. Función derivada

Si una función $y = f(x)$ definida en un dominio D tiene derivada en cada punto de D resulta una función que se llama función derivada y se representa $y' = f'(x)$



Ejemplo 1 Hallar la derivada de la siguiente función: $y = \dfrac{1}{x-2}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-2-(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h-2)(x-2)} = \frac{-1}{x^2-4x+4} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Ejemplo 2 Hallar la derivada de la función $y = \sqrt{5x-1}$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)-1} - \sqrt{5x-1}}{h} = \{\text{multiplicando y dividiendo por el conjugado}\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{5(x+h)-1} - \sqrt{5x-1})(\sqrt{5(x+h)-1} + \sqrt{5x-1})}{h(\sqrt{5(x+h)-1} + \sqrt{5x-1})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5(x+h)-1}\right)^2 - \left(\sqrt{5x-1}\right)^2}{h(\sqrt{5(x+h)-1} + \sqrt{5x-1})} = \lim_{h\to 0} \frac{5x+5h-1-5x+1}{h(\sqrt{5(x+h)-1} + \sqrt{5x-1})}$$

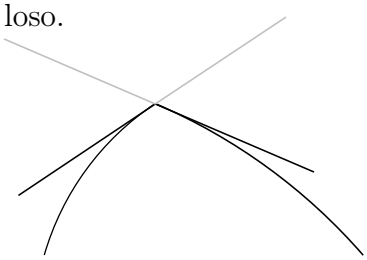
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5(x+h)-1} + \sqrt{5x-1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$$

2.4. Estudio práctico de la derivabilidad de una función

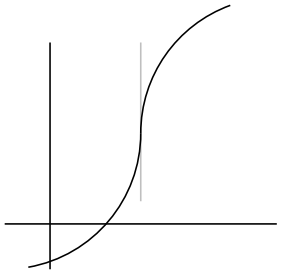
Una función no es derivable en los siguientes casos:

- Si la función no es continua en un punto automáticamente no es derivable en ese punto.
- En la gráfica sucede alguna de las siguientes situaciones:

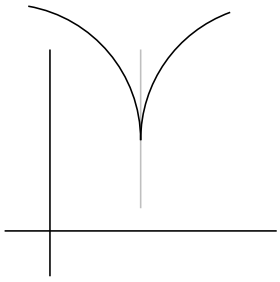
Las derivadas laterales son distintas el punto es anguloso.



Derivada infinita, inflexión vertical



Si una derivada lateral es $+\infty$ y la otra $-\infty$ el punto es de retroceso.



Ejemplos

1. Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} & si \quad x < 2 \\ a - \frac{x}{4} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

   a) Determine el valor de a para que la función sea continua en 2.

   b) Estudiar si es derivable en $x = 2$

   a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{4}{2} = 2$

   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} a - \dfrac{x}{4} = a - \dfrac{1}{2}$

   Para que sea continua $a - \dfrac{1}{2} = 2; \quad a = 5/2$

   b) La función derivada es

   $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2} & si \quad x < 2 \\ -\frac{1}{4} & si \quad x > 2 \end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -\dfrac{2}{x^2} = -1/2$

   $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} -\dfrac{1}{4} = -1/4$

   Por tanto en $x = 2$ no es derivable, presenta un punto anguloso

2. Hallar a y b para que f sea derivable en 0

   $f(x) = \begin{cases} \ln(e + \operatorname{sen} x) & si \quad x < 0 \\ x^3 + ax + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

primero hacemos que sea continua

$f(0) = b$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \ln(e + \operatorname{sen} x) = \ln e = 1;$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 + ax + b) = b,$ ha de ser $b = 1$

La función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e + \operatorname{sen} x} & si \quad x < 0 \\ 3x^2 + a & si \quad x > 0 \end{cases}$$

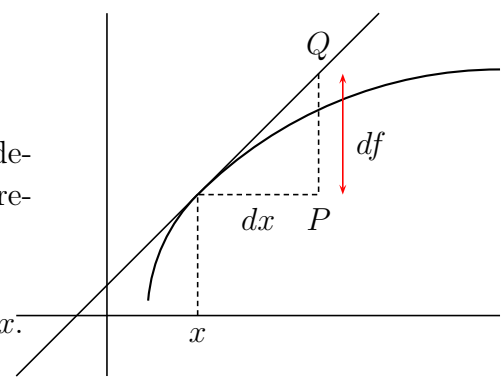
los límites en $x = 0$ son

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 3 \cdot 0 + a = a$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \dfrac{\cos 0}{e + \operatorname{sen} 0} = \dfrac{1}{e},$

luego para que coincidan ha de ser $a = 1/e$

2.5. Diferencial de una función



Diferencial de una función en un punto es el incremento de la ordenada (PQ en figura) de la recta tangente correspondiente al incremento de la variable independiente que representaremos por dx.
$df = f'(x)dx$
el diferencial de una función es el producto de la derivada por dx.

Ejemplos En ellos se puede ver distintas formas de expresar el diferencial

$u = x; \quad du = dx$

$f(x) = x^2 + 3x + 2; \quad df = (2x + 3)dx$

$f(x) = \operatorname{sen} x; \quad d(\operatorname{sen} x) = \cos x dx$

2.6. Regla de L'Hôpital

Sean f, g derivables en un entorno V de x_0. Además $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y g' no se anula en puntos de V distintos de x_0. Entonces se verifica: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ cuando este límite existe.

Además de $0/0$ resuelve también la indeterminación ∞/∞, se puede aplicar reiteradamente.

En la práctica:

En el cálculo de límites, la regla de L'Hôpital resuelve directamente las indeterminaciones $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\boxed{\lim_{x\to\dots} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{matrix} 0/0 \\ \infty/\infty \end{matrix} = \lim_{x\to\dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Cuando hay indeterminación, el límite del cociente es igual al límite del cociente de las derivadas.

Obsérvese que es el cociente de las derivadas, no la derivada del cociente.

Ejemplos

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \underset{\text{L'Hôpital}}{0/0} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-3} = 4$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-8x^2+4x+6}{x^2-9} = \underset{\text{L'Hôpital}}{0/0} = \lim_{x\to 3} \frac{6x^2-16x+4}{2x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

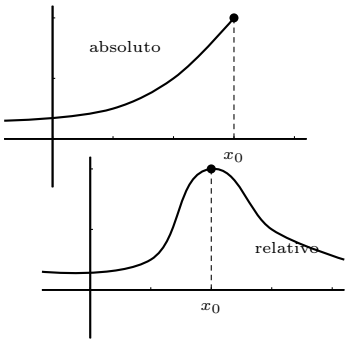
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \underset{\text{L'Hôpital}}{0/0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = \underset{\text{L'Hôpital}}{0/0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-1}{2}$

   nota: Es erróneo aplicar L'Hôpital sin que haya indeterminación:
   $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x+5}{x} = \infty$ si se deriva resulta $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3}{1} = 3$ falso

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \{1^\infty\} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x}(\cos x - 1)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}} = \underset{\text{L'Hôpital}}{0/0} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}} =$
   $e^0 = 1$

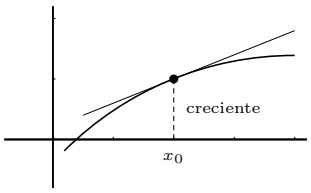
Extremos absolutos y relativos Recordemos que:
Una función tiene un máximo absoluto en un punto x_0, si en ese punto toma el mayor valor.

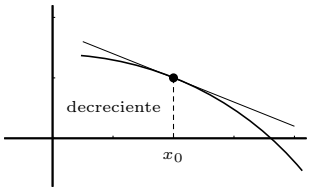
Una función tiene un máximo relativo en un punto x_0, si en ese punto toma mayor valor que en los puntos de alrededor.
Análogo sería para mínimo absoluto y mínimo relativo.



2.7. Estudio local de una función

Crecimiento y decrecimiento Consideremos la función $y = f(x)$ en puntos suficientemente próximos a x_0.
Si $f'(x_0) > 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es positiva luego f es CRECIENTE en x_0.
Si $f'(x_0) < 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es negativa luego f es DECRECIENTE en x_0





El crecimiento se estudia con el signo de la derivada

Ejemplos Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones

1. $y = 4x^3 - x^2$

   $y' = 12x^2 - 2x = 2x(6x-1)$ que se anula para $x = 0, x = 1/6$, queremos saber cuando es positiva o negativa y', esos son los los valores que delimitan cambio de signo en la y';

   Probamos por ejemplo los valores de $x : -1, 0'1, 10$

x		0		$\frac{1}{6}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		MÁXIMO		MÍNIMO	

2. $y = e^{x^2-4x}$

   $y' = e^{x^2-4x}(2x-4)$; la parte exponencial siempre es positiva, la restante se anula para $x = 2$

x		2	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

3. $y = \dfrac{(x-3)^2}{1-x^2}$

   $$y' = \frac{2(x-3).(1-x^2) - (x-3)^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(x-3)\left[1-x^2+(x-3)x\right]}{(1-x^2)^2} = \frac{2(x-3).(1-3x)}{(1-x^2)^2}$$

   queremos saber cuando es positiva o negativa para ello hallamos los valores que delimitan cambio de signo en la y': $x = 3, x = 1/3$ (el denominador por tener exponente par es siempre positivo)

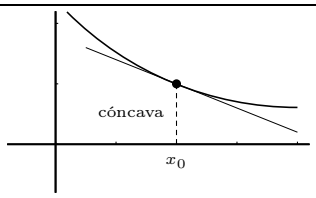
x		$\frac{1}{3}$		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		MÍNIMO		MÁXIMO	

4. $y = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

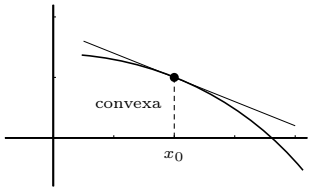
   $$y' = \frac{(x+1)^2 - (x-1)2(x+1)}{(x+1)^4} = \text{dividiendo por } x+1 = \frac{x+1-2(x-1)}{(x+1)^3} = \frac{-x+3}{(x+1)^3}$$

x		-1		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
			MÁXIMO		

En $x = -1$ hay asíntota vertical por abajo, la función se "va" a $-\infty$



Concavidad y convexidad Recordemos que una función es convexa en un punto si la función queda por debajo de la recta tangente, que es cóncava en el caso contrario y que hay punto de inflexión si cambia en el punto de convexa a cóncava o viceversa.
Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f'(x)$ es creciente, la función está por encima de la tangente, luego f es CÓNCAVA en x_0
Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f'(x)$ es decreciente, la función está por debajo de la tangente, luego f es CONVEXA en x_0



Ejemplo Estudiar la concavidad de la función $y = \dfrac{(x-1)^2}{3x-4}$

$$y' = \frac{3x^2-8x+5}{(3x-4)^2}$$

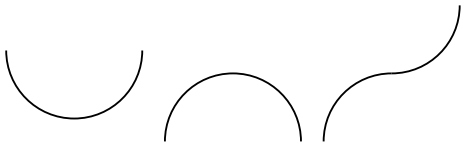
$$y'' = \frac{(6x-8)(3x-4)^2 - (3x^2-8x+5)\cdot 2\cdot(3x-4)\cdot 3}{(3x-4)^4} = \text{ dividiendo por } 3x-4 = \frac{2}{(3x-4)^3}$$

buscamos el signo de y'', el denominador se anula para $x = 4/3$ con exponente impar luego hay cambio de signo

x		$\frac{4}{3}$	
y''	$-$		$+$
y	conv $\bigcap$		conc $\bigcup$

Puntos críticos o extremos. Criterio de la segunda derivada Si $f'(x_0) = 0$ entonces en x_0 la tangente es horizontal, luego se tienen las siguientes situaciones:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) > 0, \text{cóncava , en } x_0 \text{ hay MINIMO} \\ f''(x_0) < 0, \text{convexa , en } x_0 \text{ hay MAXIMO} \end{cases}$$



Si $f'(x_0) \neq 0, \quad f''(x_0) = 0$, la función cambia la convexidad, entonces en x_0 hay INFLEXION

Cuando en un punto se anulan varias derivadas seguidas hay que razonar si corresponde máximo/mínimo o inflexión, estudiando el crecimiento:

Método práctico de estudio de puntos críticos o extremos Si $f'(x_0) = 0$ entonces en x_0 la tangente es horizontal, luego se tienen las siguientes situaciones:

$y = -(x-1)^2$

x		1	
y'	$+$		$-$

$f(1) = 0$ MAXIMO

$y = (x-1)^3$

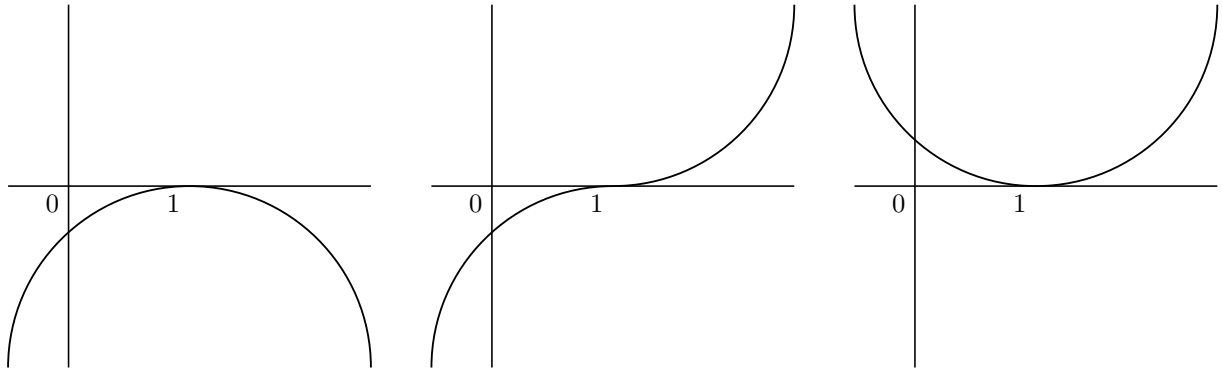
x		1	
y'	$+$		$+$

$f'(1) = 0$ INFLEXION (horizontal)

$y = (x-1)^4$

x		1	
y'	$-$		$+$

$f'(1) = 0$ MINIMO



2.8. Signo de la función, puntos de corte y asíntotas de una función racional

Considerar los tres aspectos juntos permite conocer como se acerca la función a las asíntotas.

Ejemplo Consideremos la función racional: $y = \dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$

Si factorizamos numerador y denominador veremos los valores de x en los que, al anularse algún factor, cambia el signo de y a uno y otro lado.

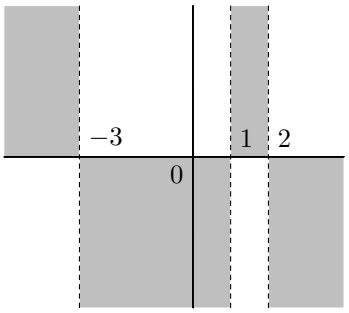
$x+3=0; \quad x=-3$

$x^2-3x+2=0; \quad x=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

La función factorizada es: $y = \dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}$

para ver el signo a cada lado damos un valor cualquiera fácil:

x	-10	-3	0	1	2	
y	$-$		$+$	$-$		$+$



Obtenemos así el regionamiento:

- Los valores de x que anulan el numerador nos dan los puntos de corte con el eje de abcisas:

  Puntos de corte: con $OY : x=0$, resulta $y = \dfrac{3}{2}$

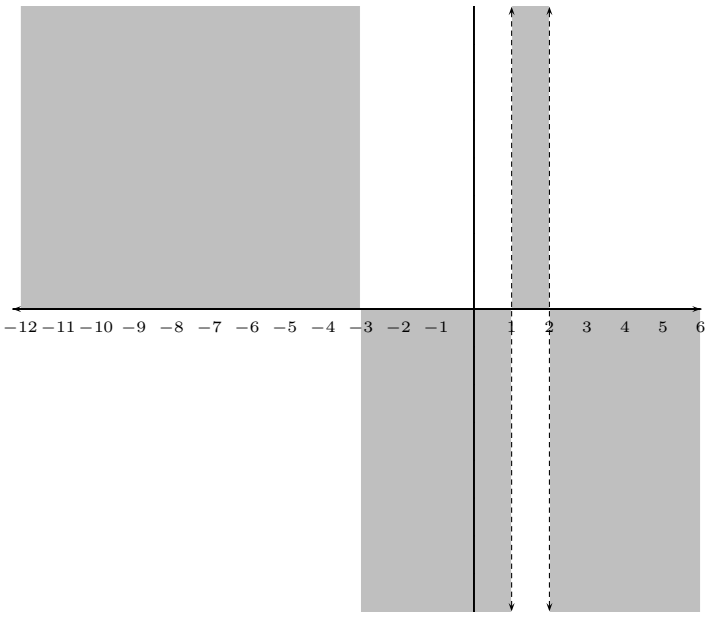
  con $OX : y=0$, resulta $x=-3$

- Los valores de x que anulan el denominador nos dan las asíntotas verticales:

  Asíntotas:

verticales $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

horizontales $n = \lim\limits_{x\to\infty} (fx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2-3x+2} = 0$ asíntota $y = 0$



Ejemplo :

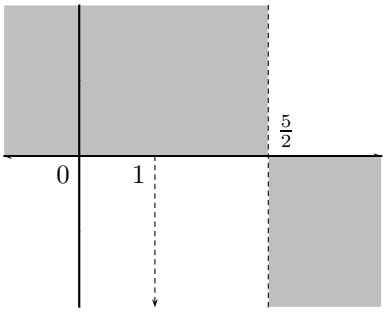
La función racional: $y = \dfrac{2x-5}{(x-1)^2}$

Regionamiento:

El denominador es siempre positivo, luego solo delimita región el numerador:

$x = \{\frac{5}{2}\}$

x		$\frac{5}{2}$	
y	$-$		$+$



Puntos de corte:

con $OY : x = 0$, resulta $y = -5$

con $OX : y = 0$, resulta $x = \frac{5}{2}$

Asíntotas:

verticales $x = 1$ con el regionamiento vemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-5}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-5}{(x-1)^2} = -\infty$, asíntota solo por abajo.

horizontales $n = \lim\limits_{x\to\infty} (fx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{(x-1)^2} = 0, \quad y = 0$

2.9. Representación gráfica de funciones

1) Dominio y regionamiento Campo de existencia es el conjunto de valores de x para los que existe la función. Regionamiento son las regiones del plano en las que hay gráfica. Por ejemplo

una exponencial $y = e^{3x-2}$ es siempre positiva, luego la gráfica está por encima del eje de abcisas. Para una función racional se estudia el signo de y (análogo al crecimiento).

2) Puntos de corte Con el eje OY se hace $x = 0$

Con el eje OX se hace $y = 0$

3) Asíntotas (rectas tangentes en el infinito)

a) Verticales: valores de x que hacen infinita la y

b) Horizontales: $y = n$; $\quad n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

c) Oblícuas: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

notas: a) Si hay asíntota horizontal no hay oblícua.

b) Los polinomios no tienen asíntotas.

c) En funciones no racionales estudiar el límite por los dos lados.

4) Extremos y crecimiento Son los máximos y mínimos. Se estudia la primera derivada.

Ejemplos Representar:

a) La función polinómica: $y = 12x - x^3$

Como es un polinomio basta con los puntos de corte y el crecimiento

1. Puntos de corte:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

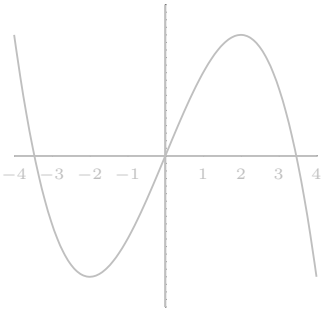
con $OX : y = 0$, resulta $x = 0, x = \pm\sqrt{12} = 3'46$

2. Extremos y crecimiento: $y' = 12 - 3x^2$, se anula para $x = -2, x = 2$

x		-2		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Sustituyendo en la función:

$f(-2) = -16$ "grande negativo", $\quad f(2) = 16$ "grande positivo"

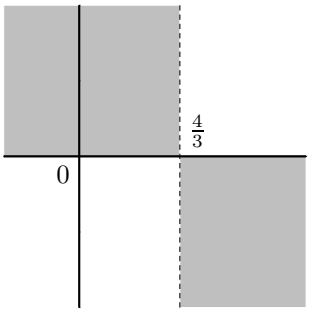


Como ejercicio dibujar la gráfica.

b) La función racional: $y = \dfrac{(x-1)^2}{3x-4}$

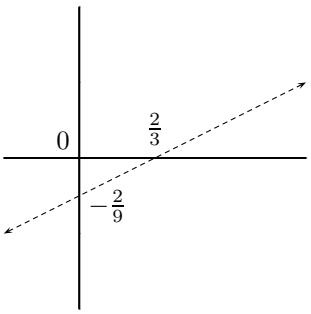
1. Dominio y regionamiento: $R - \{\frac{4}{3}\}$

x		$\frac{4}{3}$	
y	$-$		$+$



2. Puntos de corte:
   con $OY : x = 0$, resulta $y = \frac{-1}{4}$
   con $OX : y = 0$, $\dfrac{(x-1)^2}{3x-4} = 0$; $\quad (x-1)^2 = 0$;resulta $x = 1$

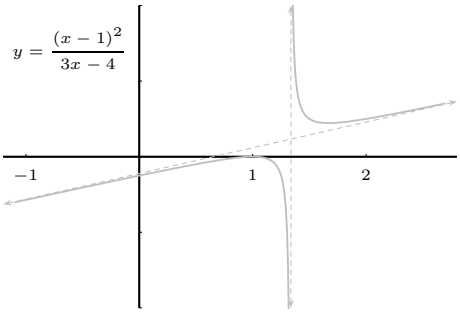
3. Asíntotas:
   verticales $x = 4/3$ anula el denominador
   horizontales $n = \lim\limits_{x\to\infty}(fx) = \infty$ no hay
   oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x(3x-4)} = \dfrac{1}{3}$
   $n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2}{3x-4} - \dfrac{x}{3}\right)$
   $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 + 4x}{(3x-4)3} = \dfrac{-2}{9}$;
   asíntota oblicua: $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{9}$



4. Extremos y crecimiento:
   $y' = \dfrac{3x^2 - 8x + 5}{(3x-4)^2}$
   $f'(x) = 0$ para $x = 1, x = 5/3$
   Probamos por ejemplo los valores de $x : 0, 1'1, 10$

x		1		$\frac{5}{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

   Sustituyendo en la función:
   $f(1) = 0, \quad (1, 0)$ MAXIMO
   $f(\dfrac{5}{3}) = \dfrac{4}{9}, \quad (\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{9})$ MINIMO



Observaciones:

1. Los siguientes apartados sólo hay que estudiarlos si se prevé que se dan en la curva.

   a) **Simetrías** (cuando la función es par o impar)

   $f(-x) = \begin{cases} f(x) \text{ función par, simetría respecto eje } OY & \text{por ejemplo:} y = x^2 - 1 \\ -f(x) \text{ función impar, simetría respecto origen} & \text{por ejemplo:} y = x^3 \end{cases}$

   si la expresión de $f(x)$ incluye algo del tipo $ax + b$ no hay simetría.

   b) **Periodicidad** (sólo funciones trigonométricas). La gráfica de una función periódica se repite, y sólo hay que estudiarla en un período.

2. Al representar una función $y = f(x)$ no puede haber una vertical que corte a la curva en dos puntos. Ni puntos de corte con asíntotas verticales.

3. Si los datos del estudio resultan insuficientes para representar se puede estudiar la concavidad.

4. En caso de duda en zonas conflictivas se pueden hallar algunos puntos.

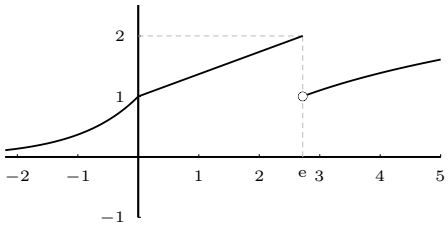
5. Las funciones trigonométricas por ejemplo $y = 3 - \cos 2x$, se representan por tabla.

6. Las funciones definidas a trozos no se estudian según el procedimiento general, los trozos suelen ser funciones conocidas.

   Ejemplo Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

   $$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ 1 + \frac{x}{e} & si \quad 0 < x \leq e \\ \ln x & si \quad e < x \end{cases}$$

   Es continua siempre, excepto en $x = e$.
   Es derivable siempre excepto:
   En $x = e$ por no ser continua,
   En $x = 0$, como es continua, estudiamos los límites de la derivada por cada lado:

   $$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x)' = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

   $$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{x}{e}\right)' = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

   por tanto es punto anguloso las derivadas son distintas por cada lado, no es derivable en $x = 0$.

7. Para representar funciones polinómicas suele ser suficiente estudiar: a) Puntos de corte, b) Extremos y crecimiento.

8. Para representar funciones racionales suele convenir estudiar: a) Puntos de corte, b) Asíntotas, c) Extremos y crecimiento.

2.10. Problemas de máximos y mínimos

Se trata de hallar un máximo o un mínimo de una función. [1]

[1] 1^0 Escribir la función a maximizar o minimizar

a) Pensar que conviene que sea x

b) La función puede quedar con dos variables. Con otra condición que den puedo, despejando, dejar la función con una variable.

2^0 Se busca el máximo o mínimo anulando la primera derivada y con el crecimiento.

a) Preparar la función para que sea cómodo derivar.

1. Hallar un número positivo cuya suma con su recíproco sea mínima.

   número $= x$, suma: $S(x) = x + \dfrac{1}{x}$, en el mínimo la derivada ha de ser 0

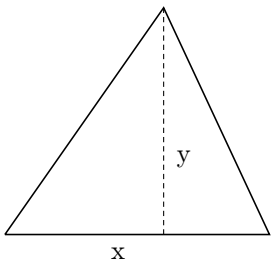
   $S'(x) = 1 + \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

   $S'(x) = 0; \quad \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

x		-1		1	
y'			$-$		$+$
y			$\searrow$		$\nearrow$

   Luego es mínimo para $x = 1$

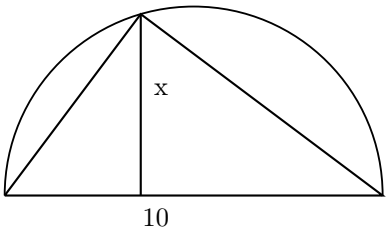
2. La suma de la base y la altura de un triángulo es 20 cm. ¿Qué longitud ha de tener la base para que el área sea máxima?
   $S = \dfrac{x.y}{2} =$ máx. $x + y = 20; y = 20 - x$
   sustituyendo: $S(x) = \dfrac{x(20-x)}{2} = \dfrac{1}{2}(20x - x^2)$
   Área: $S'(x) = \dfrac{1}{2}(20 - 2x)$, se anula para $20 - 2x = 0; \quad x = 10;$
   $S''(x) = \frac{1}{2}(-2) < 0$; en particular $S''(10) < 0$; luego: base $x = 10$ para área máxima.



3. En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un triángulo haciendo coincidir uno de los lados con un diámetro. Hallar el triángulo de área máxima que se puede construir.

   $S(x) = \dfrac{10.x}{2} = 5x \quad S'(x) = 5,$

   S' no se anula nunca, al ser positiva es siempre creciente, x ha de tomar el mayor valor posible que es 5. (máximo absoluto)



4. Hallar el valor de m, n en la siguiente función, sabiendo que $y = mx^3 - nx^2$ tiene un máximo en $(0, 0)$ y un mínimo en $(4, -32)$.

   Pasa por $(0, 0)$; sustituyendo queda $0 = 0$; no dice nada

   Pasa por $(4, -32)$; sustituyendo queda $-32 = m{\cdot}4^3 - n{\cdot}4^2; \quad -32 = 64m - 16n; \quad -2 = 4m - n$

   $y' = 3mx^2 - 2nx$; para $x = 4, \quad f'(4) = 0; \quad 3m \cdot 16 - 2n \cdot 4 = 0; \quad 6m - n = 0$

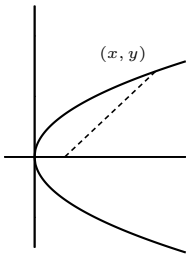
   resolviendo el sistema: $\begin{cases} -2 = 4m - n \\ 6m - n = 0 \end{cases} \qquad m = 1,\ n = 6$

   la función es $y = x^3 - 6x^2$, se puede comprobar que cumple la condición restante, o sea que $(0, 0)$ es un máximo y $(4, -32)$es mínimo.

b) Hallar los valores de x que hacen máxima o mínima la función, completar y evaluar las posibles soluciones teniendo presente el enunciado.

5. Calcular las coordenadas de los puntos de la parábola $y^2 = 4x$ tales que sus distancias al punto dado sean mínimas: a) (4,0) ; b) (1,0)

   a) Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos: $d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$
   $d = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$
   sustituyendo y^2, puesto que $y^2 = 4x$ por ser un punto de la parábola, conseguimos que quede solo en función de x.
   $d(x) = \sqrt{(x-4)^2+4x} = \sqrt{x^2-4x+16}$
   $d'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}}$
   para $d'(x) = 0$ basta anular el numerador $2x-4=0, \quad x=2$



x		2	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

   luego es un mínimo, como $y^2 = 4x$, para $x = 2$, resulta $y = \pm\sqrt{8}$:
   los puntos de la parábola son $(2, \sqrt{8}), (2, -\sqrt{8})$

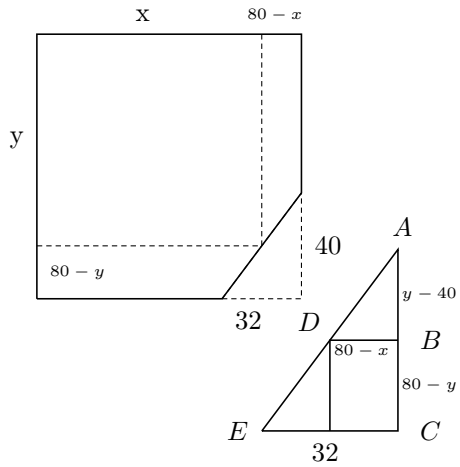
   b) Análogamente: $d = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ sustituyendo: $d(x) = \sqrt{(x-1)^2+4x} = \sqrt{x^2+2x+1} = x+1$

   $d'(x) = 1$

   no se anula nunca por tanto no hay mínimo relativo, como $d'(x) > 0$ para todo x del dominio $[0, +\infty)$, entonces es creciente siempre, por tanto el mínimo absoluto corresponde con $x = 0$.

6. Un espejo plano que tenía forma de un cuadrado de 80 cm de lado se ha roto por una esquina. El trozo roto tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 40 y 32 cm. Hallar las dimensiones del espejo rectangular de área máxima que se puede recortar del otro trozo, de modo que los bordes del nuevo espejo sean paralelos a los del primitivo.

   Si x e y son las dimensiones pedidas, la función área que hay que hacer máxima es $S = x.y$
   Por la semejanza de los triángulos ADB y AEC sabemos:
   $\dfrac{\bar{AB}}{\bar{AC}} = \dfrac{\bar{DB}}{\bar{EC}}$ es decir: $\dfrac{y-40}{40} = \dfrac{80-x}{32}$
   despejando $y = \dfrac{5(112-x)}{4}$ sustituyendo en S: $S(x) = x.\dfrac{5(112-x)}{4} = \dfrac{560x-5x^2}{4}$
   $S'(x) = \dfrac{1}{4}(560-10x) = 0$, anulando queda $560 = 10x, \quad x = 56,$



x		56	
$S'(x)$	$+$		$-$
$S(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

   es máximo

   Resultan las dimensiones $x = 56, y = 70$

2.11. Problemas

1. Hallar las siguientes derivadas aplicando la definición:

   a) $y = 3x^2 - 1$ en $x_0 = 5$

   b) $y = \dfrac{1}{3-x}$ en $x_0 = 2$

   Solución: a) 30, b) 1

   c) $y = \sqrt{5x - x^2}$ en $x_0 = 1$

   Solución: 3/4

2. Hallar las funciones derivadas aplicando la definición:

   a) $y = x^2 + 3$

   b) $y = 3x - 2x^2$

   c) $y = \dfrac{3}{5-x}$

3. Hallar las siguientes derivadas:

   a) $y = \dfrac{3x^2 - 5x}{1-x}$

   b) $y = \dfrac{1}{x-1}$

   c) $y = \sqrt{2x+4}$

   d) $y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

4. Hallar las siguientes derivadas:

   a) $y = \dfrac{e^{5x-1}}{x}$

   b) $y = \cos(8x^2 + 3x)$

   c) $y = x \ln x$

   d) $y = ar \tan x^2$

5. Hallar, si es posible, la siguiente derivada aplicando la definición:

   $y = |x+1|$ en $x_0 = -1$

6. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 4x$ en el punto de abcisa $x = 1$. Representar gráficamente.

   Solución: $y + 3 = -2(x-1)$

7. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \dfrac{(x+1)^3}{3-x}$ en el punto de abcisa 2.

   Solución: tagte: $54x - y - 81 = 0$, nor: $y - 27 = -1/54(x-2)$

8. La recta de ecuación $y = 6x + a$ es tangente a la curva $f(x) = \dfrac{bx-1}{bx+1)}$ en el punto $(0, f(0))$. Hallar a, b y la ecuación de la normal.

   Solución: b= 3, a =- 1, nor: $x + 6y + 6 = 0$

9. Estudiar la derivabilidad de

   $f(x) = |3x - 2|$

   Solución: $x = 2/3$, pto anguloso

10. Estudiar la derivabilidad de $f(x) = |x^3|$

    Solución: der siempre

11. Estudiar la derivabilidad de $y = |\operatorname{sen} x|$ en $x = 0$.

    Solución: $x = k\pi$, pto anguloso

12. Estudiar la derivabilidad de $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

    Solución: $x = 0$, no derivable por no ser continua

13. Calcular la derivada de $y = arc \tan \dfrac{1+x}{1-x} - ar \tan x$ simplificando el resultado al máximo. Interpretar el resultado.

    Solución: $f'(x) = 0$, $y = \pi/4$ constante

14. Estudiar la derivabilidad de
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & si \quad x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & si \quad 0 < x \end{cases}$$
Solución: es derivable

15. Se considera la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & si \quad 2 < x \end{cases}$$
Calcular a y b para que sea continua en todo R. ¿Es derivable la función resultante?

Solución: a= -1, b= 4, derivable excepto en $x = 0$ pto anguloso

16. Considere la función dada por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} & si \quad x \neq k\pi, k \in Z \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$
a) Estudiar la continuidad en $x = 0$.

b) Determinar si la función es derivable en $x = 0$ y, en caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

Solución: es continua y derivable, $f'(0) = 0$

Calcular los siguientes límites:

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = -1/2$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = 1/2$

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x - 8}{\sec x + 10} = 1$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{sen} x} = 1/3$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = 1/2$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)} = 2$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = 1/2$

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{(1-\frac{2}{\pi})}$

25. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) = 1$

26. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+3} - x - 2) = -2$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = 0$

28. Se sabe que $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{a}{2x}\right)$ es finito. Determinar el valor de a y calcular el límite. $a = 2, \quad -1/2$

29. Se sabe que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \alpha \operatorname{sen} x}{x^2}$ es finito. Determinar el valor de a y calcular el límite. $\alpha = 1, \quad 0$

30. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hallar los extremos:
$$y = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$
Solución: crece $(-\infty, 0)$, decrece $(0, \infty)$, máximo en $x = 0$ que vale $\frac{1}{\pi}$

31. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hallar los extremos:
$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$$
Solución: decrece siempre

32. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hallar los extremos:
$$y = \ln \frac{x^2}{2x+1}$$
Solución: $y' = \frac{2(x+1)}{x(2x+1)}$, decrece $(-1/2, 0)$, crece $(0, \infty)$, no hay máximos ni mínimos

33. Considera la función definida para $x \neq -2$ por $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{x + 2}$

a) halla las asíntotas de la gráfica de f.

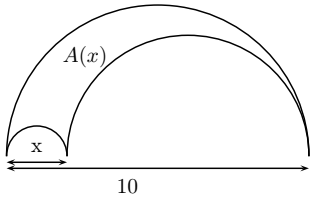
b) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto a sus asíntotas.

a) $x = -2, \quad y = 2x - 4$; b) en la vertical por la izda $-\infty$, por la derecha $+\infty$; en la oblicua por encima en $+\infty$, y por debajo en $-\infty$

34. Dada la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, determina las asíntotas de su gráfica. $x = 0; y = 1$ en $+\infty$; $y = -1$ en $-\infty$

35. Dada la función definida para $x \neq 3$ por $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 3}$, determina las asíntotas de su gráfica. $x = 3; y = 2$ en $+\infty$; $y = -2$ en $-\infty$

36. Partiendo de una semicircunferencia de radio 10. Expresa el área A en función de x y determina el valor de x de modo que sea máxima.



37. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad: $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

Solución: $\cap(-\infty, 4/6\ , \cup(4/6, \infty)$

38. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad: $y = x^2.e^{-x^2}$

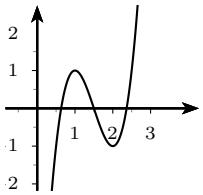
Solución: $\cup(-\infty, -\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}), \cap(-\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}, -\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}),$ $\cup(-\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}, +\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}), \cap(+\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}, +\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}),$ $\cup(+\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}, \infty)$

39. La curva de ecuación $y = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje OY en el punto $(0, -9)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 1)$. Se pide:

1. Encontrar a, b y c.

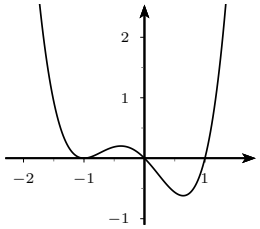
2. Representar de forma aproximada dicha curva.

Solución: $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9, x = \dfrac{3}{2}, x = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2}, f'(x) = 12x^2 - 36x + 24, x = 1, x = 2$



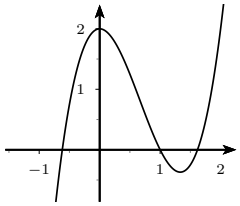
40. Representar $y = (x^2 - x)(x + 1)^2$

$y' = (x + 1)(4x^2 - x - 1)$



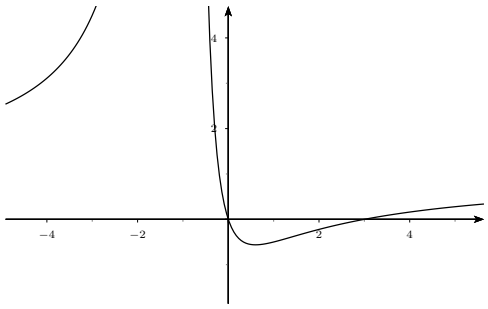
41. Representar $y = 2x^3 - 4x^2 + 2$

$y' = 6x^2 - 8x$



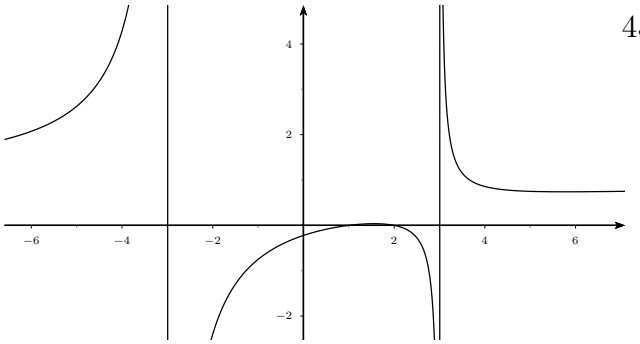
42. Representar $y = \dfrac{x^2 - 3x}{(x + 1)^2}$

$y = \dfrac{5x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^4}$



43. Representar $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$

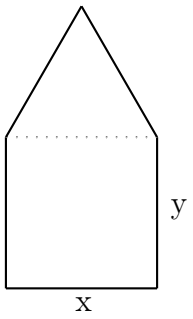
$y = \dfrac{3x^2 - 22x + 27}{(x^2 - 9)^2}$



44. Dado el triángulo rectángulo de catetos 4 y 3 m. Determinar el área del mayor rectángulo que se puede construir de manera que dos lados estén sobre los catetos.

$S = 3\ \mathrm{m}^2$

45. Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado de un triángulo equilátero y tiene de perímetro 12 m. Determine las dimensiones de la ventana para que deje pasar la cantidad máxima de luz.



$x = 2'8117, y = 1'7825$

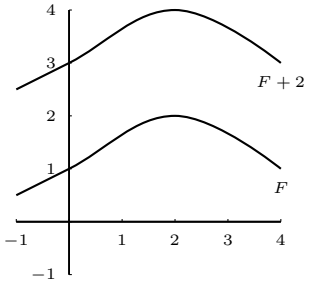
Capítulo 3

INTEGRALES

3.1. Primitiva de una función

Integrar es lo contrario de derivar, $2x$ es la derivada de x^2, el proceso contrario es:
$\int 2xdx = x^2 + C$, que se lee:
"la integral de 2x diferencial de x es x^2 más C",
(C es una constante cualquiera), a la integral se le llama primitiva.

En general:
Sea f una función, la función F se dice primitiva de f cuando la derivada de F es f; es decir $F' = f$. Por tanto:
"F primitiva de f"equivale a "f es derivada de F"
Por ejemplo: dada la función $2x$ una primitiva de ella es x^2, también es primitiva de ella $x^2 + 5$.
Luego dada una primitiva cualquiera, sumándole cualquier constante se obtiene otra primitiva, se escribe:



$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Ejemplos

1. $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$

2. $\int 7dx = 7x + C$

3. $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C;$

   en general para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente $\int x^ndx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4. $\displaystyle\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x} + C$

7. $\displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

8. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

9. $\displaystyle\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

Propiedades Se deducen de las mismas propiedades de la derivadas.

1. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$; la integral de la suma es igual a la suma de las integrales, es decir para integrar una suma se va integrando cada sumando.

   Ejemplo $\displaystyle\int \left(x^4 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^5}{5} + \ln|x| + C$

2. $\displaystyle\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$; la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función, es decir los números pueden entrar o salir en el signo integral.

   Ejemplo $\displaystyle\int \frac{e^x}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^x dx = \frac{1}{2} e^x + C$

3.2. Tabla de primitivas inmediatas

Son aquellas en las que el integrando es la derivada de una función elemental.

$\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$; para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente.

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ "logarítmica"

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ "exponencial"

en particular: $\int e^x dx = e^x + C$

"trigonométricas":

$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -cotx + C$

"trigonométricas inversas":

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\operatorname{sen} x + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\tan x + C$

Las demostraciones son inmediatas, basta derivar los segundos miembros.

Ejemplos

1. $\int (3x^2 - 8x + 1)dx = x^3 - 4x^2 + x + C$

2. $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2ar\operatorname{sen} x + C$

3. $\int \frac{1}{3(x^2+1)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{3}arc\tan x + C$

4. $\int 5\cos x dx = 5\operatorname{sen} x + C$

5. $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$

3.3. Integración de funciones compuestas

Cuando la variable no es es solo "x", sino una función hay que recordar que al derivar se añadía multiplicando la derivada de la función interior. Ahora hay que hacer el proceso al revés: ha de estar en el integrando la derivada de lo de "dentro" que "desaparece" al integrar.

nota: la logarítmica se reconoce porque en la fracción arriba esté la derivada de lo de abajo.

Ejemplos

1. $\int (5x-2)^3 dx = \frac{1}{5}\int 5(5x-2)^3 dx = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^4}{4} + C$

2. $\int \operatorname{sen}(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen}(2x+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$

3. $\int \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$

6. $\displaystyle\int e^{8x+2}dx = \frac{1}{8}\int 8e^{8x+2}dx = \frac{1}{8}e^{8x+2} + C$

7. $\displaystyle\int x.e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x.e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x+4)dx = \frac{1}{5}\int 5\operatorname{sen}(5x+4)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x+4) + C$

9. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x.\cos x dx = \int (\operatorname{sen} x)^1.\cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{7}{4-3x}dx = -\frac{7}{3}\int \frac{-3}{4-3x}dx = -\frac{7}{3}\ln|4-3x| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \int x(x^2+3)^{-1/2}dx = \frac{1}{2}\int (2x)(x^2+3)^{-1/2}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+3)^{1/2}}{1/2} = \sqrt{x^2+3} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}arc\tan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

14. $\displaystyle\int (2x^2+3)^3dx = \int (8x^6+36x^4+54x^2+27)dx = \frac{8x^7}{7} + \frac{36x^5}{5} + \frac{54x^3}{3} + 27x + C$

15. $\displaystyle\int \frac{x}{e^{x^2}}dx = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = \text{ logarítmica } = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$

17. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx = \int \operatorname{sen} x.\cos^{-3} x dx = -\int -\operatorname{sen} x.\cos^{-3} x dx = \frac{\cos^{-2} x}{2} = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$

$\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \tan x\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x(\ln x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|\ln x+1| + C$

3.4. Integración por partes

La fórmula de integración por partes se deduce de la derivada de un producto de funciones: $(u.v)' = u'.v + u.v'$ .Considerando el diferencial $(u.v)'dx = u'.vdx + u.v'dx$; como el diferencial es el producto de la derivada por dx se tiene: $d(u.v) = vdu + udv$ despejando $udv = d(u.v) - vdu$; integrando: $\int udv = \int d(u.v) - \int vdu$ queda:

$$\boxed{\int udv = u.v - \int vdu}$$

Suele ser el método adecuado cuando al descomponer el integrando la parte que se deriva se simplifica, por ejemplo en logarítmos, $arc\tan$, etc.

Ejemplos

1. $\int xe^{3x-1}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x-1}dx, & v = \int e^{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x-1}dx = \frac{e^{3x-1}}{3} \end{array} \right\} =$
$\frac{x}{3}e^{3x-1} - \int \frac{e^{3x-1}}{3}dx = \frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{9}\int 3e^{3x-1}dx = \frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{9}e^{3x-1} + C$

2. $\int \ln xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$

3. $\int \frac{x+1}{e^x}dx = \int (x+1)e^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x+1 & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -(x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}dx =$
$-(x+1)e^{-x} - e^{-x} + C$

4. $\int x^2e^xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^xdx & v = e^x \end{array} \right\} = x^2e^x - \int 2xe^xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2dx \\ dv = e^xdx & v = e^x \end{array} \right\} =$
$x^2e^x - \left[2xe^x - \int 2e^xdx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

5. $\int \cos^2 xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos x & du = -\operatorname{sen} xdx \\ dv = \cos xdx & v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = \cos x.\operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 xdx = \cos x.\operatorname{sen} x +$
$\int (1-\cos^2 x)dx = \cos x.\operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 xdx = I$
$2I = \cos x.\operatorname{sen} x + x; \quad I = \frac{\cos x.\operatorname{sen} x + x}{2} + C$

6. $\int e^x.\operatorname{sen} xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & du = e^xdx \\ dv = \operatorname{sen} x & v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^x.\cos x + \int e^x.\cos xdx =$
$\left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & du = e^xdx \\ dv = \cos x & v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} = -e^x.\cos x + e^x.\operatorname{sen} x - \int e^x.\operatorname{sen} xdx = I$
$I = \frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C$

3.5. Integración por descomposición

Consiste en descomponer la integral dada en suma de integrales.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = ar\,\mathrm{sen}\,x + \sqrt{1-x^2} + C$

2. [1]

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$$

Integración de funciones racionales. Son de la forma $\dfrac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}}$

3. [2]

$$\int \frac{x+3}{2x-5}dx = \left\{ \begin{array}{c|c} x+3 & 2x-5 \\ \cline{2-2} -x+\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{11}{2} & \end{array} \right\} = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{11}{2}}{2x-5}\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{11}{4}\ln|2x-5| + C$$

4. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x-3}dx =$ dividiendo: cociente $= 3x+9 = \int \left(3x+9+\frac{25}{x-3}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 9x + 25\ln|x-3| + C$ resto $= 25$

5. $\displaystyle\int \frac{x-1}{3x^2-6x+7}dx =$ buscamos que arriba esté la derivada del denominador $= \frac{1}{6}\int \frac{6x-6}{3x^2-6x+7}dx = \frac{1}{6}\ln|3x^2-6x+7| + C$

6. $\displaystyle\int \frac{7x+4}{9x^2+4}dx =$ separamos fracciones $= \int \frac{7x}{9x^2+4}dx + \int \frac{4}{9x^2+4}dx =$

Hacemos aparte cada una

- $\displaystyle\int \frac{7x}{9x^2+4}dx = \frac{7}{18}\int \frac{18x}{9x^2+4}dx = \frac{7}{18}\ln|9x^2+4|$
- $\displaystyle\int \frac{4}{9x^2+4}dx = \int \frac{\frac{4}{4}}{\frac{9}{4}x^2+1}dx = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}x\right)^2+1}dx = \frac{2}{3}ar\tan\frac{3x}{2}$

la integral final resulta $\dfrac{7}{18}\ln|9x^2+4| + \dfrac{2}{3}ar\tan\dfrac{3x}{2} + C$

[1] Se utiliza la fórmula de trigonometría: $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

[2] Aplicamos que en una división $\dfrac{D}{d} = C + \dfrac{R}{d}$

Procedimiento general para racionales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}dx =$ dividiendo $= \displaystyle\int \left(1+\frac{3x-1}{x^2-3x+2}\right)dx = I$

   primero vamos a ver si se puede descomponer en factores el denominador; raíces del denominador $x=1, x=2$; reales simples; la descomposición es:

   $$\frac{3x-1}{x^2-3x+2} = \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

   A y B los obtenemos identificando numeradores $3x-1 = A(x-2)+B(x-1)$

   $$\begin{cases} \text{para } x=2: & 5=B(2-1); \quad B=5 \\ \text{para } x=1: & 2=A(1-2); \quad A=-2 \end{cases} \text{ luego}$$

   $$I = \int \left(1+\frac{-2}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx = x-2L|x-1|+5L|x-2|+C$$

2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx = I$

   descomponiendo el denominador $(x^2-2x+1) = (x-1)^2$ raíz $x=1$ doble

   $$\frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A+B(x-1)}{(x-1)^2}$$

   identificando numeradores:

   $$x+1 = A+B(x-1); \begin{cases} \text{para } x=1: & 2=A, \quad A=2 \\ \text{para } x=0: & 1=2-B, \quad B=1 \end{cases} \text{ sustituyendo}$$

   $$I = \int \left(\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{-2}{x-1}+\ln|x-1|+C$$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx = I$ raíces $x = \dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}$, imaginarias; el denominador no se puede descomponer, se empieza buscando el logaritmo, primero el coeficiente de x multiplicando y dividiendo por 2:

   $$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+2}dx = \begin{matrix}\text{se separa ln y se} \\ \text{simplifica}\end{matrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \int \frac{1}{x^2-2x+2}dx =$$

   Para hacer esta última construimos el cuadrado en el denominador:

   $x^2-2x = (x-1)^2-1$; luego $x^2-2x+2 = (x-1)^2-1+2 = (x-1)^2+1$ resulta:

   $$\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + ar\tan(x-1)+C$$

En resumen: **Integración de funciones racionales por descomposición**

1) Se divide si procede.

2) Una vez que el grado del numerador es menor que el del denominador se ve si es logarítmica (arriba la derivada de lo de abajo)

3) Se hallan las raíces del denominador y se descompone éste en factores.

4) Se descompone el integrando en suma de fracciones.

a) las raíces reales simples dan neperiano

b) las raíces reales múltiples dan neperiano y potencia(s)

c) las raíces imaginarias simples dan neperiano y $ar\tan$.

5) Si no se quiere utilizar el método general visto se puede usar la fórmula:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

3.6. Primitivas por cambio de variable

Ejemplos

1. Para $\sqrt{ax+b}$ se hace el cambio $\sqrt{ax+b}=t$

- $$\int x^2\sqrt{1+2x}\,dx = \left\{\begin{array}{lll} \sqrt{1+2x}=t; & 1+2x=t^2; & x=\frac{t^2-1}{2} \\ & & 2dx=2tdt; \quad dx=tdt \end{array}\right\}$$
$$= \int\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 t\ t\ dt = \frac{1}{4}\int(t^2-1)^2t^2dt = \frac{1}{4}\int(t^4-2t^2+1)t^2dt = \frac{1}{4}\int(t^6-2t^4+t^2)dt =$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right) = \frac{1}{28}\sqrt{(1+2x)^7} - \frac{1}{10}\sqrt{(1+2x)^5} + \frac{1}{12}\sqrt{(1+2x)^3} + C$$

- $$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{x}=t; & x=t^2 \\ dx=2tdt & \end{array}\right\} = \int\frac{t}{1-t}2t\ dt = \int\frac{2t^2}{1-t}\ dt =$$
$$\left\{\begin{array}{l} 2t^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \big\lfloor\, -t+1 \\ \cline{2-2} \\ -2t^2 \quad + \quad 2t \qquad\qquad -2t-2 \\ \cline{1-1} \\ \quad / \qquad\quad 2t \\ \qquad\qquad -2t \quad + \quad 2 \\ \cline{2-2} \\ \qquad\qquad\quad / \quad + \quad 2 \end{array}\right\} = \int\left(-2t-2+\frac{2}{1-t}\right)dt =$$
$$= -2\frac{t^2}{2} - 2t - 2\int\frac{-1}{1-t}dt = -t^2-2t-2\ln|1-t| = -x-2\sqrt{x}-2\ln|1-\sqrt{x}|+C$$

2. Para racional en e^x se hace el cambio $e^x=t$

$$\int\frac{e^{2x+1}}{4+e^x}dx = \left\{\begin{array}{l} e^x=t \\ e^xdx=dt; \quad dx=\frac{dt}{t} \\ e^{2x+1}=e^{2x}\cdot e=(e^x)^2\cdot e=t^2\cdot e \end{array}\right\} = \int\frac{e.t^2}{4+t}.\frac{dt}{t} = e\int\left(1-\frac{4}{4+t}\right)dt =$$
$$e(t-4\ln|t+4|) = e(e^x-4\ln|e^x+4|)+C$$

3. Para racional en $\ln x$ se hace el cambio $\ln x=t$

$$\int\frac{6\ln^2x-2\ln x+1}{x(3\ln x+4)}dx = \left\{\begin{array}{l} \ln x=t \\ \frac{dx}{x}=dt \end{array}\right\} = \int\frac{6t^2-2t+1}{3t+4}dt = \int\left(2t-\frac{10}{3}+\frac{43/3}{3t+4}\right)dt =$$
$$t^2-\frac{10}{3}t+\frac{43}{9}\ln|3t+4| = \ln^2x-\frac{10}{3}\ln x+\frac{43}{9}\ln|3\ln x+4|+C$$

4. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a \operatorname{sen} t \\ dx = a\cos t dt \end{array} \right\} = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \frac{\cos t \operatorname{sen} t + t}{2} =$

$\displaystyle\frac{1}{2}a^2 \left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad .\frac{x}{a} + ar\operatorname{sen}\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2}.x + a^2 ar \operatorname{sen}\frac{x}{a} \right) + C$

Funciones racionales en seno y coseno Algunos cambios que las transforman en racionales son:

impar en $\operatorname{sen} x$ cambio: $\cos x = t$

impar en $\cos x$ cambio: $\operatorname{sen} x = t$

También conviene a veces aplicar fórmulas trigonométricas por ejemplo: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

1. $\displaystyle\int \cos^2 x.\operatorname{sen}^3 x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x dx = dt \end{array} \right\} = \int -t^2(1-t^2)dt = \int (-t^2+t^4)dt =$

$\displaystyle\frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x} + C$

3. $\displaystyle\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{-\operatorname{sen} x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x dx = dt; \quad dx = \frac{dt}{-\operatorname{sen} x} \\ \frac{\cos^2 x}{-\operatorname{sen} x}dx = \frac{t^2}{-\operatorname{sen} x}\frac{dt}{-\operatorname{sen} x} = \frac{t^2 dt}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{t^2 dt}{1-t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{1-t^2}dt =$ es racional

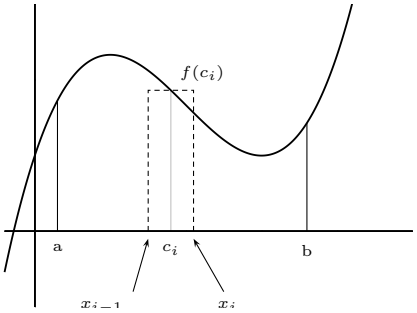
$\displaystyle= \int \left(-1 + \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t} \right) dt = -t - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| =$

$\displaystyle-\cos x - \frac{1}{2}\ln|1-\cos x| + \frac{1}{2}\ln|1+\cos x| + C$

3.7. Noción de integral definida

Sea $y = f(x)$ continua en $[a, b]$

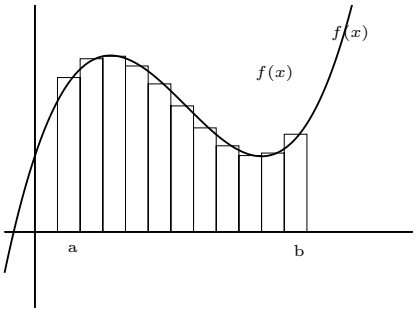
dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, obtenemos pues n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, 2, \ldots n$.



Consideremos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Entonces $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ es el área del rectángulo de base el intervalo $[x_{i-1}, xi]$ y altura $f(c_i)$

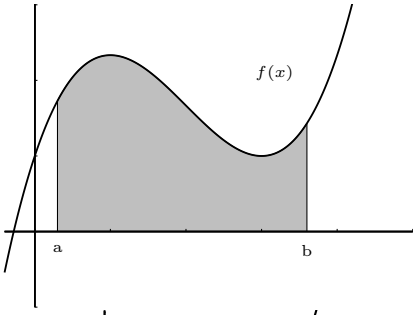
La integral definida entre a y b de $f(x)$ es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos así construidos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}[f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ con } c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$



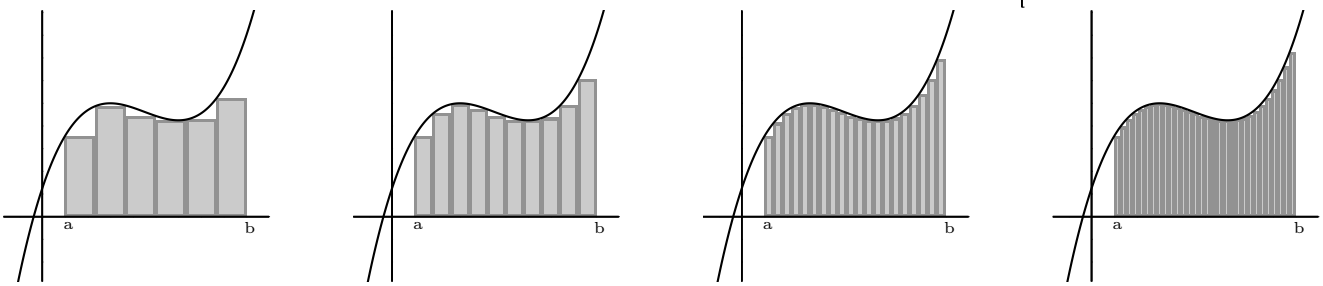
a, b se llaman **límites de integración**.

El segundo miembro es una suma "infinita"de áreas de rectángulos.



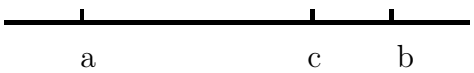
Gráficamente la integral es el área limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre las abcisas a y b.

nota: (salvo el signo pues $f(x)$ puede ser negativa).



Consecuencias Se verifican las siguientes propiedades a partir del concepto de integral definida.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, se puede descomponer el intervalo de integración en subintervalos.



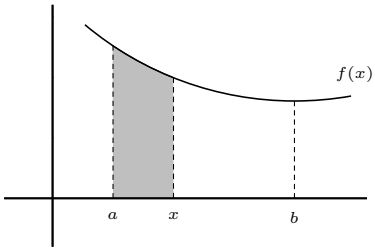
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, si se intercambian los límites, la integral cambia de signo.

3. Monotonía de la integral:

   Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$. Entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

3.8. Función integral definida.

Cuando $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, la función
$S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$, se llama función integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$.
$S(x)$ es el área bajo la curva desde a hasta x



3.9. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$. La función integral definida: $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$ es primitiva de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo Hallar el punto del intervalo $[0, 2]$ en el que la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt$ alcanza su valor mínimo.

La derivada es: $f'(x) = \dfrac{x-1}{1+x^2}$

x		1	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

se alcanza el mínimo en $x = 1$

3.10. Regla de Barrow

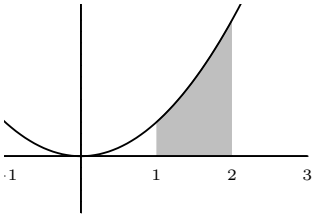
La definición dada no es útil en la práctica, la Regla de Barrow relaciona la integral definida con el cálculo de primitivas, y permite a partir de ellas hallar el valor de las integrales definidas.

$\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$, con $F(x)$ primitiva de $f(x)$

La demostración se deduce de que la función integral definida y otra primitiva se diferencian en una constante.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int_1^2 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$



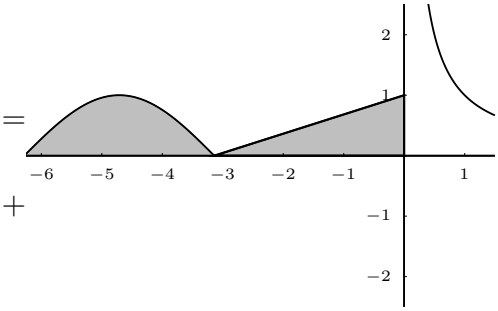
2. Calcular $\displaystyle\int_{-2\pi}^{0} f(x)dx$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & si \quad x \leq -\pi \\ \frac{x}{\pi} + 1 & si \quad -\pi < x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si \quad 0 < x \end{cases}$$

$$\int_{-2\pi}^{0} f(x)dx \quad = \quad \int_{-2\pi}^{-\pi} \operatorname{sen} x dx \; + \; \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{x}{\pi} + 1\right) dx \quad =$$

$$[-\cos x]_{-2\pi}^{-\pi} + \left[\frac{x^2}{2\pi} + x\right]_{-\pi}^{0} = -\cos(-\pi) + \cos(-2\pi) +$$

$$0 - \left(\frac{\pi^2}{2\pi} - \pi\right) = 1 + 1 + \pi/2 = 2 + \pi/2$$

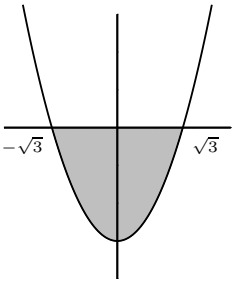


3.11. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas

Área encerrada entre la curva y el eje OX: Es necesario conocer el comportamiento del signo de la función en el intervalo de integración. (El regionamiento de la función).

Ejemplos

1. Hallar el área encerrada por $y = x^2 - 3$ y el eje de abcisas
$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} \quad S = 4\sqrt{3}\ u^2$
también, como es simétrica podíamos haber hallado $S = 2.S_1$ con S_1 área entre 0 y $\sqrt{3}$.



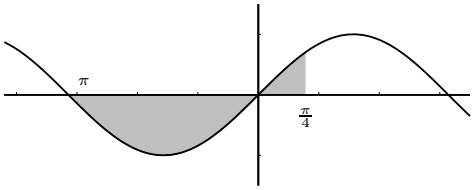
2. Hallar el área encerrada por $y = \operatorname{sen} x$, el eje de abcisas y las rectas $x = -\pi, x = \pi/4$.

$S = S_1 + S_2$

$S_1 : \displaystyle\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_{-\pi}^{0} = -\cos 0 + \cos(-\pi) = -2, \quad S_1 = 2$

$S_2 = \displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_{0}^{\pi/4} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

$S = 3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ u^2$



Área encerrada por dos curvas: Sean f y g las curvas: si $f \geq g$ en el intervalo de integración, entonces el área viene dada directamente por la integral de $f - g$.

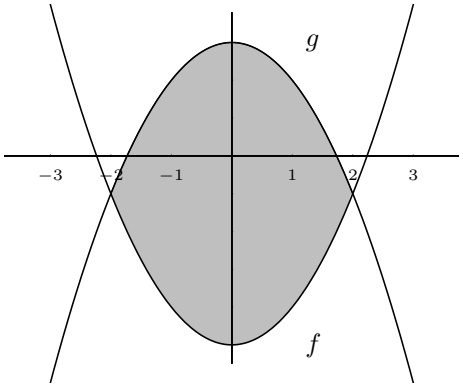
Si no dan los intervalos de integración se hallan los puntos de corte entre las curvas. Si son dos puntos se hace la integral de $f - g$ y luego se toma el valor absoluto.

1. Hallar el área limitada por $f : y = x^2 - 5, \quad g : y = 3 - x^2$

   Igualamos las funciones para hallar los puntos de corte: $3 - x^2 = x^2 - 5; \quad 2x^2 - 8 = 0$ se cortan en $x = \pm 2$, y $g \geq f$

   $S = 2S_1 = 2\displaystyle\int_0^2 g - f$

   $S = 2\displaystyle\int_0^2 [3 - x^2 - (x^2 - 5)]dx = 2\int_0^2 (8 - 2x^2)dx = \frac{64}{3}\ u^2$



2. Hallar el área encerrada por las curvas $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = (x+1)(x-1)^2$.

   Hay tres puntos de corte $x = -1, x = 1, x = 2$

   $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad S = S_1 + S_2$

   $S_1 =$ área encerrada por f y g entre -1 y 1

   $S_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} g - f = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx =$

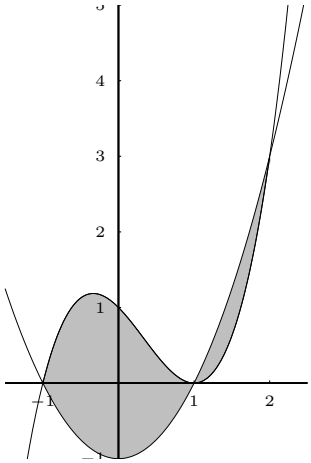
   $\left[x^4/4 - 2x^3/3 - x^2/2 + 2x\right]_{-1}^{1} = 1/4 - 2/3 - 1/2 + 2) - (1/4 + 2/3 - 1/2 - 2) = 8/3$

   $S_2 =$ área encerrada por f y g entre 1 y 2

   $S_2 = \displaystyle\int_1^2 f - g = \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2)dx =$

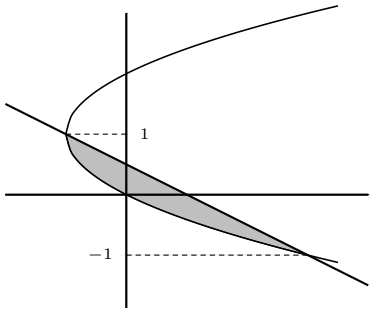
   $\left[-x^4/4 + 2x^3/3 + x^2/2 - 2x\right]_1^2 = 5/12$

   Resulta $S = \dfrac{37}{12}\ u^2$



3. Área encerrada por $x = y^2 - 2y$; y la recta que pasa por los puntos $(-1, 1), (5, -2)$

En este caso nos interesa integrar con respecto al eje de ordenadas, intercambian sus papeles x e y:
la recta es [a] : $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-1}{-3}$. $\quad x = -2y+1$
Los puntos de corte con la parábola son, igualando: $y^2 - 2y = -2y+1; \quad y = \pm 1$
llamamos: recta $g(y)$, parábola $f(y)$



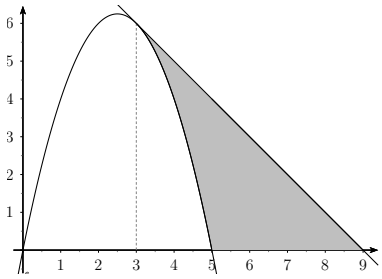
$$S = \int_{-1}^{1} g - f = \int_{-1}^{1} (1-y^2)dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_1^1 = \frac{4}{3}\ u^2$$

[a] ecuación de la recta en el plano $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$

4. Hallar el área que encierra la curva $y = 5x - x^2$, su recta tangente en el punto de abcisa $x = 3$ y el eje de abcisas.

Dibujamos la parábola con los puntos de corte
$5x - x^2 = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$ El vértice está en $x = 2'5$

El área buscada es = área de triángulo − área entre la parábola y el eje OX.



Recta tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$ $\quad \begin{cases} y_0 = f(3) = 5 \cdot 3 - 3^2 = 6 \\ m = f'(3); \quad f'(x) = 5 - 2x; \quad f'(3) = 5 - 2 \cdot 3 = -1 \end{cases}$

$y - 6 = -1(x - 3)$

Punto de corte de la tangente con el eje OX es $y = 0; \quad 0 - 6 = -x + 3; \quad x = 9$

Área del triángulo: la altura: $f(3) = 6$, la altura es 6, la base $9 - 3 = 6$,

Área del triángulo $= \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$

Área entre la parábola y el eje OX:

$$\int_3^5 (5x - x^2)dx = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_3^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} - \left[\frac{45}{2} - \frac{27}{3}\right] = \frac{22}{3}$$

Área buscada: $18 - \dfrac{22}{3} = \dfrac{32}{3} u^2$

3.12. Problemas

1. $\int (x^2 + x) \quad dx =$

   Solución: $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

2. $\int (1 - x) \quad dx =$

   Solución: $x - \frac{x^2}{2} + C$

3. $\int (1 + \frac{2}{x}) \quad dx =$

   Solución: $2 \ln x + x + C$

4. $\int \frac{1}{x^2} \quad dx =$

   Solución: $-\frac{1}{x} + C$

5. $\int (\frac{3}{x} + 1) \quad dx =$

   Solución: $3 \ln x + x + C$

6. $\int (2\sqrt{x} + 1) \quad dx =$

   Solución: $\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + x + C$

7. $\int 2 \cos x \quad dx =$

   Solución: $2 \operatorname{sen} x + C$

8. $\int (3e^x - 1) \quad dx =$

   Solución: $3e^x - x + C$

9. $\int (2 + 3x) \quad dx =$

   Solución: $\frac{3x^2}{2} + 2x + C$

10. $\int (1 - \operatorname{sen} x) \quad dx =$

    Solución: $\cos x + x + C$

11. $\int \frac{1}{x^2 + 1} \quad dx =$

    Solución: $ar \tan x + C$

12. $\int (1 - \frac{3}{x}) \quad dx =$

    Solución: $x - 3 \ln x + C$

13. $\int \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} \quad dx =$

    Solución: $5ar \operatorname{sen} x + C$

14. $\int (\cos x - 2 \operatorname{sen} x) \quad dx =$

    Solución: $2 \cos x + \operatorname{sen} x + C$

15. $\int (x^2 - x + 3) \quad dx =$

    Solución: $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + C$

16. $\int (-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) \quad dx =$

    Solución: $-2 \ln x - \frac{1}{x} + C$

17. $\int (2 \operatorname{sen} x - x) \quad dx =$

    Solución: $-2 \cos x - \frac{x^2}{2} + C$

18. $\int (3\sqrt{x} - 1) \quad dx =$

    Solución: $2x^{\frac{3}{2}} - x + C$

19. $\int (\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2}) \quad dx =$

20. $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 + x) \quad dx =$

    Solución: $-\ln x + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} + C$

21. $\int (1 - \frac{1}{1 + x^2}) \quad dx =$

    Solución: $x - ar \tan x + C$

22. $\int x(1 - x^2) dx =$

    Solución: $-\frac{1}{4}(1 - x^2)^2 + C$

23. $\int x \cos x^2 dx =$

    Solución: $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C$

24. $\int (2x + 1)\sqrt{x^2 + x} dx =$

    Solución: $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + x)^3} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{2e^x}{e^x-1}dx$

Solución: $2\ln|e^x-1|+C$

26. $\displaystyle\int \frac{5}{1+8x}dx$

Solución: $\frac{5}{8}\ln|1+8x|+C$

27. Halla la función $F(x)$ para la que $F'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ y $F(1)=2$

Solución: $-\dfrac{1}{x}+3$

28. Halla la primitiva de $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$ que se anula para $x=2$

Solución: $F(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}-\sqrt{3}$

29. $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}dx$

Solución: $-(x+1)/e^x+C$

30. $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

Solución: $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

31. $\displaystyle\int \tan 2x dx$

Solución: $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$

32. $\displaystyle\int \frac{x-1}{3x^2-6x-24}dx$

Solución: $1/6.\ln|3x^2-6x-24|+C$

33. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x}{2x-5}dx$

Solución: $x^2/2+x+5/2.\ln|2x-5|+C$

34. $\displaystyle\int \sqrt{4x-1}dx$

Solución: $\dfrac{1}{6}\sqrt{(4x-1)^3}+C$

35. $\displaystyle\int \frac{2e^x dx}{e^{2x}+1}$

Solución: $2ar\tan e^x+C$

36. $\displaystyle\int (2-8\operatorname{sen}x.\cos x)dx$

Solución:$2x+4\cos^2 x+C$

37. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$

Solución:$\frac{\ln^2 x}{2}+C$

38. $\displaystyle\int ar\tan x dx$

Solución:$x.ar\tan x-1/2.\ln(1+x^2)+C$

39. $\displaystyle\int x.\operatorname{sen}3x dx$

Solución:$\frac{-x\cos 3x}{3}+\frac{\operatorname{sen}3x}{9}+C$

40. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x dx$

Solución:$\frac{\operatorname{sen}x(-\cos x)+x}{2}+C$

41. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{e^x}dx$

Solución:$\frac{-e^{-x}(\operatorname{sen}x+\cos x)}{2}+C$

42. $\displaystyle\int \frac{3x+7}{1-6x}dx$

Solución:$-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\ln|1-6x|+C$

43. $\displaystyle\int \frac{3x-5}{6x^2+1}dx$

Solución:$\frac{1}{4}\ln|6x^2+1|-\frac{5}{\sqrt{6}}ar\tan(\sqrt{6}x)+C$

44. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x))dx$

Solución: $\dfrac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x)-\cos(\ln x))+C$

45. $\displaystyle\int x^2\ e^x dx$

Solución: $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

46. $\displaystyle\int (x-2)\cos x dx$

Solución: $(x-2)\operatorname{sen}x+cosx+C$

47. $\displaystyle\int x\ \cos(3x+1)dx$

Solución: $\dfrac{x}{3}\operatorname{sen}(3x+1)+\dfrac{1}{9}\cos(3x+1)C$

48. $\displaystyle\int (x^2+3x)\ln x dx$

Solución: $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}+C$

49. $\displaystyle\int \cos^3 x dx$

Solución:$\operatorname{sen} x-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C$

50. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos(3x+\pi)dx$

Solución: $-\frac{1}{3}$

51. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$

Solución: $\frac{e-1}{2}$

52. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\cos x dx$

Solución:$1/4$

53. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x.\operatorname{sen} x^2 dx$

Solución:$1/2$

54. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}dx$

Solución:$2\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{2}+2\log\left(\sqrt{x}+2\right)\right)=3'89$

55. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}=$

Solución: $2\ln|\sqrt{x}+1|=$ $2\ln 2$

56. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx=$

Solución:$-\ln|\operatorname{sen} x+\cos x|+C$ 0

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\quad dx=$

Solución: $\frac{\ln 2}{2}$

58. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+9x^2}=$

Solución: $\frac{ar\tan 3}{3}$

59. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\quad dx=$

Solución: $\frac{\ln 2}{2}$

60. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\quad dx=$

Solución: $\frac{1}{3}$

61. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\quad dx=$

Solución: $\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}$

62. $\displaystyle\int_1^e x\ln x\quad dx=$

Solución: $\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

63. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\quad dx=$

Solución: $\frac{\pi}{6}$

64. Encontrar las abcisas de los posibles máximos y mínimos de la función $f:R\longrightarrow R$ definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^2-1}{t^4+1}dt$.

Solución: -1 max., 1 min.

65. Hallar el área comprendida entre la curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje OX.

Solución:$8u^2$

66. Mediante una integral por partes calcular $I=\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x+2)dx$. Representar gráficamente la parte del plano cuya área está representada por la integral I.

Solución:$2\ln 2-1$

67. Dadas las funciones $f(x)=1/(2+x^2)$, $g(x)=x^2/3$; representarlas gráficamente y calcular el área de la región del plano delimitada por ellas.

Solución: $\sqrt{2}ar\tan\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{9}$

68. Determinar el área de la región acotada delimitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2.\ln x$, su tangente en el punto de abcisa e y el eje OX.

Solución: $\frac{e^3+2}{18}u^2$

69. Determinar el área limitada por la parábola $y = 3x - x^2$ y la recta normal a ella por el punto de abcisa 3.

Solución: $\frac{500}{81}$

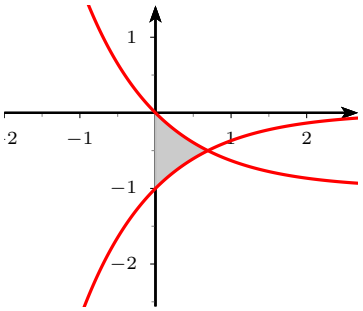
70. Área comprendida entre $x = 4 - y^2$ y el eje OY.

Solución: $32/3u^2$

71. Hallar el área de la región limitada por la función $y = x.e^x$ y las rectas $y = 0, x = 1$.

Solución: $1\ u^2$

72. Hallar el área que encierra $f(x) = e^{-x} - 1$ con su derivada y el eje de ordenadas



S = 0'31 u^2

73. Hallar el área de la región limitada por la función $y = \ln x$ y las rectas $y = 0, y = 1, x = 0$

Solución: $x \ln x - x,\ e - 1$

74. Hallar el área que encierra la curva $y = x^2 - 3x$, su recta tangente en el punto de abcisa $x = 2$ y el eje de abcisas.

Solución: $5/6$

75. Se define la función $f(x) = x - \dfrac{k}{x}$. Se pide:

a) Determinar k para que la función tenga un máximo para $x = -1$

b) Hallar el área que encierra con el eje OX entre $x = 2$ y $x = 4$

Solución: $6'69u^2$

76. Hallar el área que encierra la curva $y = \dfrac{2x-5}{3x+12}$ con el eje OX entre $x = 2$ y $x = 4$

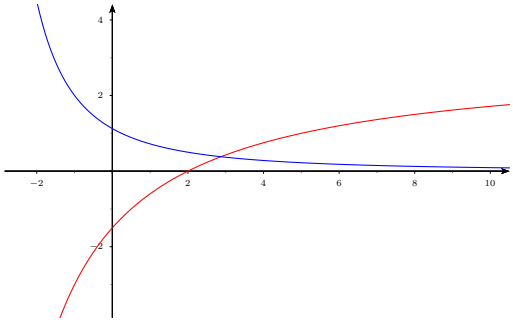
Solución: $0'11u^2$

77. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-6}{x+4}$ Hallar el área que encierra con su función derivada entre $x = 0$, $x = 1$.

$f'(x) = \dfrac{18}{(x+4)^2}$

$\displaystyle\int f - f'dx = -18\ \ln(|x+4|) + 3\ x + \frac{18}{x+4}$

$S = -18\ \ln 5 + 18\ \ln 4 + \dfrac{21}{10} = -1'91658$



Las siguientes requieren integrar racionales

78. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x}{(x-2)(1-x)}dx$

Solución: $-x - 12\ln|x-2| + 5\ln|1-x| + C$

79. $\displaystyle\int \frac{3x-5}{6x^2-1}dx$

Solución:

$\dfrac{3-5\sqrt{6}}{12}.\ln|\sqrt{6}x-1| + \dfrac{3+5\sqrt{6}}{12}.\ln|\sqrt{6}x+1| + C$

80. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(6x+1)^2}dx$

Solución: $-\frac{1}{4}.\frac{1}{6x+1}+\frac{1}{12}.\ln|6x+1|+C$

81. $\displaystyle\int \frac{2-5x}{2x^2-3x+1}dx$

Solución:$-3\ln|x-1|+1/2.\ln|2x-1|+C$

82. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}dx$

Solución:

$-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|+C$

83. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

Solución: $\dfrac{1}{2}\left[\ln(\operatorname{sen} x+1)-\ln(\operatorname{sen} x-1)\right]+C$

84. $\displaystyle\int \frac{3dx}{e^x-1}$

Solución:$3(\ln|e^x-1|-\ln e^x)+C$

85. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{2x^2-12x+18}dx$

Solución:$\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{x-3}+3\ln|x-3|+C$

86. $\displaystyle\int \frac{6x+8}{x^2+2x+5}dx$

Solución:$3\ln(x^2+2x+5)+ar\tan\frac{x+1}{2}+C$

87. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$

Solución:$0'203$

88. Razonar que $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}$ se puede escribir en la forma $f(x)=p+\dfrac{mx+n}{x^2-5x+6}$ siendo m,n,p números reales. Calcular una primitiva de f y el área limitada por la curva $y=f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x=4$, $x=6$.

Solución: a) $f(x)=1+\frac{5x-3}{x^2-5x+6}$ b) $x+12\ln|x-3|-7\ln|x-2|$ c) $2+12\ln 3-7\ln 4+7\ln 2$

89. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x}dx$

Solución: $\left[-\dfrac{1}{2}\ln(\cos x+1)+\dfrac{1}{2}\ln(\cos x-1)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$ $0'881$

Capítulo 4

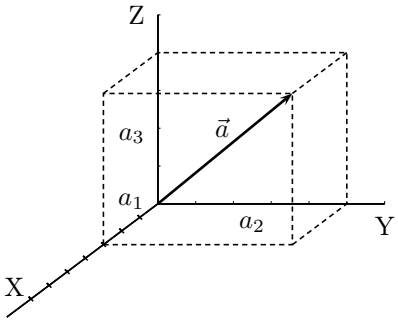
ESPACIO VECTORIAL R^3. MATRICES.

4.1. Espacio vectorial de los vectores libres del espacio

Consideremos R^3 conjunto de ternas ordenadas de números reales por ejemplo (3,2,0), se les llama vectores, en general representaremos estos elementos por:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \text{ con } a_i \in R$$

Se representan en el espacio dotado de un sistema de coordenadas $OXYZ$.

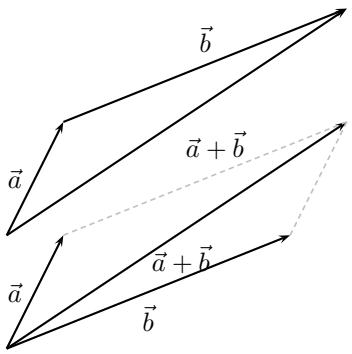


4.2. Operaciones con vectores

Suma de vectores: se suman componente a componente, dados: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Gráficamente: diagonal del paralelogramo, o uno a continuación del otro



Propiedades de la suma:

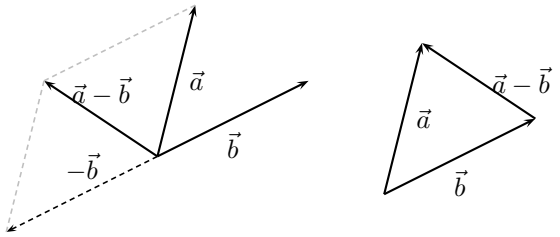
asociativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

elemento neutro: (vector nulo) $\vec{0} = (0, 0, 0)$

elemento simétrico (vector opuesto): $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ con $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de R^3

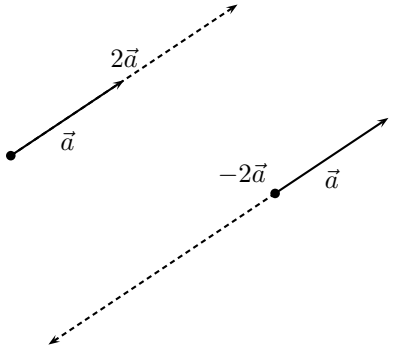
Para restar dos vectores:
a) Se suma el opuesto
b) Otra diagonal del paralelogramo



Producto de un escalar por un vector: se multiplica cada componente sean: $\alpha \in R, \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\alpha.\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

Gráficamente: se lleva el vector $\vec{a}$ $''\alpha''$ veces, se obtiene un vector de igual dirección, con el mismo sentido si α es positivo y sentido contrario si α es negativo.



Propiedades del producto de un escalar por un vector:

pseudoasociativa $(\alpha.\beta).\vec{a} = \alpha.(\beta.\vec{a})$

producto por la unidad $1.\vec{a} = \vec{a}$

distributiva respecto de la suma de escalares $(\alpha + \beta).\vec{a} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{a}$

distributiva respecto de la suma de vectores $\alpha.(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha.\vec{a} + \alpha.\vec{b}$

con $\vec{a}, \vec{b},$ de R^3 y con $\alpha, \beta,$ de R.

El conjunto R^3 con la suma, el producto por escalar y las propiedades que verifican tiene estructura de espacio vectorial, abreviadamente: $(R^3, +, .R)$ e. v.

Análogamente $(R^n, +, .R)$ es el e.v. de las n-tuplas de números reales, $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

4.3. Dependencia lineal

Combinación lineal de unos vectores dados es toda suma de esos vectores multiplicados por escalares.

Ejemplos

- Dados los vectores $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (5, 1, 6)$, $\vec{c} = (2, 4, -1)$ La expresión siguiente es una combinación lineal, " c.l." de ellos.

  $2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = 2(3, -2, 1) + (5, 1, 6) - 3(2, 4, -1) = (5, -15, 11)$

- Comprobar si el vector $\vec{s} = (-2, 0, 6)$ es combinación lineal de los vectores:

  $\vec{v} = (1, 0, 2), \vec{w} = (4, 0, -2)$

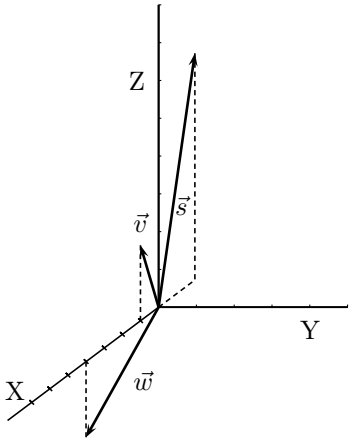
  $\vec{s} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$:

  $(-2, 0, 6) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(4, 0, -2)$ separando coordenadas

  $$\begin{cases} -2 = \alpha + 4\beta \\ 0 = 0 \\ 6 = 2\alpha - 2\beta \end{cases} \quad ; \alpha = 2, \beta = -1$$

  luego $\vec{s} = 2\vec{v} - \vec{w}$

  por tanto si un vector es combinación lineal de otros dos está en el mismo plano que ellos.



Conjunto de vectores linealmente dependiente Un conjunto de vectores es linealmente dependiente (abreviadamente l.d.) si ALGUNO de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros.

Ejemplo Dos vectores que tienen igual dirección son l.d. pues uno de ellos es igual al otro multiplicado por un número.

Esto se traduce en que sus coordenadas son **proporcionales**:

$\vec{v} = (2, -4, -10), \vec{w} = (-3, 6, 15)$, $\quad \vec{w} = \dfrac{-3}{2}\vec{v} \quad$ y las coordenadas: $\dfrac{2}{-3} = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-10}{15}$

Conjunto de vectores linealmente independiente Un conjunto de vectores es linealmente independiente (abreviadamente l.i.) si NINGUNO de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros.

Base del espacio vectorial R^3 de los vectores del espacio Una base del espacio vectorial R^3 está formada por tres vectores linealmente independientes.

En general base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores l.i. tal que todo vector del e.v. se puede escribir como combinación lineal de ellos.

Dados tres vectores que forman base, todo vector de R^3 se puede escribir como c.l. de ellos.

A los coeficientes de los vectores en su expresión como c.l. de ellos se les llama **coordenadas** de ese vector en esa base.

Ejemplo Dada la base formada por los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de R^3, si $\vec{x} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$, entonces el vector $\vec{x}$ tiene de coordenadas 2, 3 y -1 en la base formada por esos vectores.

Subespacio vectorial o variedad lineal engendrado por 1 o 2 vectores es el conjunto de sus combinaciones lineales. En el primer caso son los vectores que están en la misma recta que el vector dado y en el segundo son los vectores que están en el mismo plano que los vectores dados.

4.4. Matriz

Matriz de orden $m \times n$ es un cuadro formado por m filas y n columnas de números reales.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz 5×6

Observaciones

1. En un elemento de una matriz el subíndice primero indica su fila y el segundo su columna, a_{hk} es el elemento de la fila h, columna k.

2. Se llama diagonal principal a la formada por los elementos a_{ii}.

3. Se llama matriz fila si está formada por una sola fila (3,-2,0)

   Se llama matriz columna si está formada por una sola columna.

4. Llamaremos matriz triangular a aquella cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son 0

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Matriz cuadrada es la que tiene igual número de filas que de columnas.

6. Matriz traspuesta de una dada A, es la matriz A' obtenida cambiando filas por columnas, para obtenerla se escribe la 1ª fila como 1ª columna, la 2ª fila como 2ª columna, etc:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

4.5. Operaciones con matrices

1) **Suma**: para sumar dos matrices del mismo orden se suman los elementos correspondientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \\ 8 & -13 \end{pmatrix}$$

2) **Producto por escalar**: se multiplican todos los elementos por el número

$$(-3).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -15 & 0 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

3) **Producto de matrices**: dos matrices son multiplicables si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. El producto de una matriz de orden $m \times n$ por una matriz de orden $n \times p$ es una matriz de orden $m \times p$, en la que el elemento del lugar ij se obtiene operando la fila i de la 1ª matriz con la columna j de la 2ª matriz.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 0+1\cdot 2+(-1)\cdot(-5) & 2\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 2 & 0\cdot 0+3\cdot 2+0\cdot(-5) & 0\cdot 1+3\cdot 0+0\cdot 2 & 0\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Se verifican las propiedades y consecuencias de fácil comprobación:

1. Asociativa $A.(B.C) = (A.B).C$

   observación El producto no es conmutativo, tampoco entre matrices cuadradas.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Se llama matriz unidad o identidad a aquella cuyos elementos de la diagonal principal son 1 y los restantes 0. Al multiplicar una matriz por la matriz unidad se obtiene la misma matriz, es el neutro para el producto cuando se puede hacer éste.

   $$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Es distributivo respecto de la suma de matrices. $A.(B + C) = A.B + A.C$

4. La traspuesta del producto es el producto de las traspuestas cambiadas de orden $(A.B)' = B'.A'$

Ejemplo Hallar la matriz A en la siguiente ecuación matricial $3A - CB' = DI_4$ siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{3}(DI_4 + CB')$$

$$CB' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 12 & 1 \\ 9 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}; \quad DI_4 = D \quad D + CB' = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 13 & 0 \\ 7 & 6 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10/3 & 7/3 & 13/3 & 0 \\ 7/3 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

4.6. Determinante de una matriz cuadrada

nota previa : Recordemos lo referente a permutaciones

Dado el conjunto $\{1, 2, 3, ..n\}$, se llama permutación de sus n elementos a toda posible ordenación de los n elementos.

ejemplo: Dado $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ una permutación es: 23514.

Dada una permutación diremos que dos elementos forman inversión si están en distinto orden que el inicial. En el ejemplo están en inversión 2 y 1, 3 y 1, 5 y 1, 5 y 4. El número total de inversiones se obtiene comparando cada elemento con todos los que le siguen, en el ejemplo hay 4 inversiones.

Determinante de una matriz cuadrada A , que se representa $|A|$, es la suma algebraica de todos los productos obtenidos tomando un elemento de cada fila y columna, con signo más si el número total de inversiones de las permutaciones de los subíndices fila y columna es par, y menos en el otro caso.

Si vamos tomando el primer factor de la primera fila, el 2^0 de la 2^a, etc, sólo tendremos que tener en cuenta la permutación de los subíndices columna.

Determinante de orden 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinante de orden 3. Regla de Sarrus: .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ejemplos Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1; \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -103; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 11 \\ 13 & 14 & 19 \end{vmatrix} =$$

4.7. Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

   Resulta de que al cambiar filas por columnas los sumandos del determinante son los mismos y con igual signo por la definición.

   Como consecuencia de esta propiedad son ciertas para columnas todas las propiedades para filas que siguen.

2. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

   Esto se deduce de la definición pues el único sumando del desarrollo que no incluye un factor 0 es el formado por los elementos de la diagonal principal.

   $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{l}\text{empezando por abajo y evitando los ce-} \\ \text{ros, la única elección posible es 5, en la} \\ \text{fila anterior -3, etc}\end{array} = 5.(-3).4.2 = -120$$

3. Si los elementos de una fila son 0, el determinante es 0.

   Trivial pues en cada sumando del desarrollo hay un elemento de esa fila.

4. Al multiplicar una fila por un número el determinante queda multiplicado por ese número.

   Al haber en cada sumando del desarrollo un elemento de esa fila se podría sacar factor común ese número.

5. **Si se permutan entre sí dos filas de un determinante éste cambia de signo**.

   Si por ejemplo en el de orden 3 cambiamos la 2^a y la 3ª fila, la permutación de las filas pasa a ser 132 con lo que se añade una inversión en cada sumando.

   Como ejercicio comprobar la propiedad cambiando la 2^a y 3ª fila en el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

6. Si cada elemento de una determinada fila es igual a la suma de varios sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes que se obtienen al sustituir dicha fila por los primeros sumandos, los segundos, etc.

   Es consecuencia de la definición y de la propiedad distributiva de los números reales.

Como ejercicio comprobar: $\begin{vmatrix} a+b & x \\ c+d & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & x \\ d & y \end{vmatrix}$

7. a) Un determinante con dos filas iguales es 0.

   Es consecuencia de que si se permutan entre sí dos filas de un determinante éste cambia de signo, pues intercambiando esas filas se llegaría a que $|A| = -|A|$ por tanto $|A| = 0$ pues el único número igual a su opuesto es el 0.

   b) **Si una fila es proporcional a otra el determinante es 0.**

   Se deduce de que al multiplicar una fila por un número el determinante queda multiplicado por ese número, pues se podría sacar fuera del determinante el factor de proporcionalidad y quedarían dos filas iguales.

   c) **Un determinante es igual al que resulta de sumar a una fila una combinación lineal de las restantes, es decir, una suma de esas filas multiplicadas por números.**

   Es consecuencia de a), b) y de la propiedad anterior.

Ejemplo Consideremos el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = |A|$

sumamos a la 1ª fila una comb. lin. de las otras $\alpha \cdot 2^a + \beta \cdot 3^a$

$$\begin{vmatrix} x+\alpha a_1+\beta b_1 & y+\alpha a_2+\beta b_2 & z+\alpha a_3+\beta b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta b_1 & \beta b_2 & \beta b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

A partir de esto podemos triangular una matriz (hacer 0 a los elementos por debajo de la diagonal principal), sin alterar el determinante utilizando combinaciones lineales.

Ejemplo Calcular triangulando:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{rrr} 2^a\text{fila} + 1^a \times (-3) & & \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -9 \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -9 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{rrr} 3^a\text{fila} + 1^a \times (-2) & & \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \{3^a + 2^a \times (-3/7)\} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -8/7 \end{vmatrix} = 8$$

8. **Un determinante es 0 sii una fila es combinación lineal de las restantes.**

   Es consecuencia de que podemos restar a esa fila la combinación lineal y quedará una fila de 0.

9. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes:

   $|A.B| = |A|.|B|$.

   Como ejercicio comprobarlo para: $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

4.8. Menor y adjunto

Dada una matriz cualquiera:

Menor es cualquier determinante que resulte de suprimir un adecuado número de filas y de columnas.

En la matriz: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ el determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ es el menor que resulta de suprimir la fila 2 y las columnas 2 y 4.

Menor complementario de un elemento de una matriz cuadrada: es el menor que resulta de suprimir su fila y su columna.

en $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ es el menor complementario de 5.

Adjunto de un elemento de una matriz cuadrada: Llamamos adjunto de un elemento: a_{ij} al determinante del menor complementario dotado del mismo signo si $i + j$ es par y con signo contrario si $i + j$ es impar, en el ejemplo el adjunto del 5 es -6.

Matriz adjunta de una matriz cuadrada: es la matriz de los adjuntos de sus elementos.

4.9. Desarrollo de un determinante por adjuntos de una línea

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila por sus correspondientes adjuntos.

Ejemplo Desarrollar por los adjuntos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 7\vec{j} + 13\vec{k}$$

Esto se utiliza para hallar determinantes de orden superior a 3.

En la práctica suele ser útil antes obtener ceros en una línea para simplificar operaciones, o sea se combina con el método de triangulación

Ejemplo Hallar abreviadamente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2^a\text{fila} - 1^a \\ 4^a\text{fila} - 1^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{desarrollando por la } 1^a \text{ columna} =$$

$$2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Propiedad En una matriz cuadrada la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra paralela es 0.

4.10. Matriz inversa de una matriz cuadrada

Dada una matriz A su inversa A^{-1} es la que multiplicada con ella da la matriz unidad.

La matriz inversa es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante de la matriz.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[adj(A^t)]$$

Por tanto para que una matriz tenga inversa es necesario y suficiente que su determinante sea distinto de 0.

Ejemplo Hallar la inversa de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Primero trasponemos: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{su adjunta es: } \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{como el determinante} \\ \text{de la matriz dada es 3} \\ \text{la matriz inversa es:} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1/3 & 1/3 \\ -4/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Resolver la ecuación matricial $B - AX = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Primero despejamos X

$B - AX = C$

$-AX = C - B$

$AX = -(C - B)$

$AX = (B - C)$

$X = A^{-1}(B - C)$

Hallamos $B - C = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Ahora multiplicamos A^{-1} por la **izquierda** de $B - C$:

$X = A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{2} & -12 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Resolver la ecuación matricial $3X = A \cdot X + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3X - A \cdot X = B; \quad 3IX - A \cdot X = B; \quad (3I - A) \cdot X = B; \quad X = (3I - A)^{-1} \cdot B;$$

$$3I - A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad (3I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3I - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

4.11. Rango de una matriz

Rango por filas de una matriz es el número máximo de filas linealmente independientes.

Es inmediato ver que en una matriz triangular, con los elementos de la diagonal principal no nulos, todas las filas son l.i. (ninguna se puede escribir como c.l. de las otras).

En consecuencia teniendo en cuenta que operando con combinaciones lineales no se altera el número de filas linealmente independientes podemos hallar el rango de una matriz por un procedimiento análogo al de triangulación en determinantes.

Ejemplo Hallar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & -1 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & -4 & 1 \\ -3 & -11 & -12 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a \text{ fila } + 1^a \times 6 \\ 3^a + 1^a \times (-5) \\ 4^a + 1^a \times (-3) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 23 & 24 & 14 \\ 0 & -23 & -24 & -14 \\ 0 & -23 & -24 & -14 \end{pmatrix}$$

luego $\text{ran}(A) = 2$

Rango por menores El rango de una matriz es el orden del menor de orden más grande no nulo.

Demostración de que el rango por filas y el rango por menores coincide:

Se puede triangular la matriz de manera que no se altere el rango ni los determinantes de los menores que se construyan con sus elementos, así se llega a una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

que da directamente el rango por filas y el menor más grande no nulo.

Consecuencias:

1. En una matriz el número de filas linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes, igual al rango.

   Ejemplo: En la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la última fila es la suma de las dos primeras, por tanto se puede afirmar que sólo hay 2 columnas linealmente independientes.

2. El rango de una matriz es igual al de su traspuesta.

3. Al reordenar las filas de un determinante, al multiplicar una fila por un número o al sumar dos filas multiplicadas por números, el determinante puede cambiar pero no se hace cero. Por ello se utilizan estas operaciones para calcular el rango.

4.12. Cálculo práctico del rango

Matrices numéricas: Para matrices numéricas suele ser conveniente hallar el rango a base de triangular, estando atentos a menores que puedan dar el rango directamente.

nota: Si la matriz es pequeña basta buscar un menor de orden 2 no nulo y orlarlo.

Matrices con parámetros: Para matrices con parámetros lo conveniente suele ser anular los menores más grandes que se puedan formar. En particular si una matriz es cuadrada se anula el determinante de toda la matriz.

Ejemplos

1. Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 1^a \\ 3^a \times 2 + 1^a \times (-3) \\ 4^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3^a \times 3 + 2^a \times 5 \\ 4^a \times 3 + 2^a \times 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 22 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es $2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 22 & 8 \\ 17 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ Luego el rango es 4.

2. Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{intercambiamos las} \\ \text{dos primeras filas} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3^a + 1^a \times (-2) \\ 5^a - 1^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{como las dos filas últi-} \\ \text{mas son iguales a la } 3^a \\ \text{las eliminamos} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matriz en la que el menor recuadrado tiene determinante no nulo; el rango es 3.

3. Calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{reordenamos} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & -4 \\ 4 & -8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4^a - 1^a \times 2 \\ 5^a + 1^a \times 2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

matriz en la que las dos últimas filas son comb. lin. de la 2^a y el menor recuadrado tiene determinante no nulo; el rango es 3.

4. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

Teniendo marcado un menor de orden 2 no nulo calculamos el determinante:

$$|A| = \left|\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ \hline 5 & -3 & -6 \end{array}\right| = 0, \qquad \text{luego: rango}(A) = 2$$

5. Calcular para los distintos valores de k el rango de la matriz: $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ k & 7 & 5 \\ 2 & 3-k & 1 \end{pmatrix}$

   el determinante de la matriz es: $|M| = -5k^2 + 28k - 74$; anulando: $k = \dfrac{28 \pm \sqrt{28^2 - 1480}}{10}$ no da solución real, luego: $\forall k \in R,\ \text{rango}(M) = 3$

6. Calcular para los distintos valores de k el rango de la matriz:

   $\begin{pmatrix} k & 3 & 2 \\ 3 & 2 & k \\ 2 & k & 3 \end{pmatrix}$ el determinante de la matriz es: $\begin{vmatrix} k & 3 & 2 \\ 3 & 2 & k \\ 2 & k & 3 \end{vmatrix} = 18k - 35 - k^3$; anulando:

   $-k^3 + 18k - 35 = 0$
   $$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 18 & -35 \\ -5 & & 5 & -25 & 35 \\ \hline & -1 & 5 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$
   $-k^2 + 5k - 7 = 0$ no tiene raíces reales

   Única solución: $k = -5$

   - para $k \neq -5$, rango(A) $= 3$
   - para $k = -5$, resulta: $\left(\begin{array}{rr|r} -5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ \hline 2 & -5 & 3 \end{array}\right)$ rango(A) $= 2$

7. Calcular para los distintos valores de t el rango de la matriz:

   $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 & t \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   Seleccionamos un menor numérico de orden 2 no nulo: $\left(\begin{array}{rr|rr} -2 & 2 & -3 & t \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ \hline 0 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right)$

   Calculamos los determinantes que resultan de orlarlo: $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

   $\begin{vmatrix} -2 & 2 & t \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -12t - 68 = 0$; para $t = -17/3$

   para $t \neq -17/3$, rango(A) $= 3$
   para $t = -17/3$, rango(A) $= 2$

8. Calcular para los distintos valores de x e y el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 1 & y & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos prescindir de la última columna, seleccionamos el menor de orden 2 no nulo que incluye la 1^a y la 5ª fila. Poniendo ésta en primer lugar, acumulamos los parámetros en las últimas filas

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & -6 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & y & -3 \end{array}\right)$$

eliminamos la 3ª fila que es igual a la $2^a \times (-2)$, los menores de orden 3 que resultan orlando ese menor de orden 2 de determinante no nulo son:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & y & -3 \end{vmatrix}$$

cuyos determinantes igualados a 0: $-x = 0, \quad -y+2 = 0,$

nos permiten concluir: para $x \neq 0$ o para $y \neq 2$ el rango es 3
para $x = 0, y = 2$ el rango es 2

Observación: Hay que distinguir con precisión las propiedades semejantes de determinantes y de rango en las que éste no varía y el determinante sí aunque nunca cambia a 0:

Si se intercambian dos filas el determinante cambia de signo;

Si se multiplica una fila por un número y se le suma otra multiplicada por otro número el determinante queda multiplicado por el primer número.

Determinante de Van der Monde: se opera con combinaciones lineales de abajo hacia arriba:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 3^a - 2^a \times a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix} = 2^a - 1^a \times a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= 1. \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

4.13. Problemas

1. Representar gráficamente el vector $\vec{v} = (6, 5, 4)$

2. Ver si alguno de los vectores $\vec{a} = (-1, -2, 1)$, $\vec{b} = (3, 5, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 3)$ se puede escribir como combinación lineal de los otros.

   Solución: $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

3. Resolver el siguiente sistema matricial
$$\begin{cases} 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

   Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcular $A'.B - C^2$.

   Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 8 & -6 & -6 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz P que verifique $P - B^2 = A.B$

   Solución: $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 18 \\ 13 & 10 & 31 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$.

6. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $H = A + A^2 + ... + A^n$.

   Solución: $H = \begin{pmatrix} n & 0 \\ \frac{n+n^2}{2} & n \end{pmatrix}$

7. Calcular triangulando $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

   Solución: 2

8. Calcular triangulando $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$

   Solución: 1

9. Calcular $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

   Solución: -120

10. Hallar la adjunta de la matriz del problema 7

    Solución: $\begin{pmatrix} -10 & -5 & 9 \\ -2 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

11. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 14 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

    Solución: 0

12. Resolver $\begin{vmatrix} 1-\alpha & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\alpha & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{vmatrix} = 0$

    Solución: $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 4\alpha + 4, \quad \alpha = 2, \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

13. Calcular la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

14. Dada la matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ averiguar para qué valores del parámetro x, la matriz A no tiene inversa. Calcular la inversa de A cuando x = 2.

    Solución: no hay inversa para $x = 1, 3$, $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

15. Resolver la ecuación de matrices $A.X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$,

    Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$

16. Resolver la ecuación matricial $M.X + N = P$, siendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

    Solución: $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

17. Resolver el sistema matricial
    $$\begin{cases} A.X - 2Y = B \\ -X + C.Y = 3I \end{cases}$$
    siendo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I =$ identidad

    Solución:
    $X = \begin{pmatrix} -7/2 & -3/2 \\ 2/3 & -11/3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -11/6 & -1/6 \end{pmatrix}$

18. Resolver la ecuación de matrices $3I_2 - AX = BC + X$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

    Solución: $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 & -44 \\ 21 & 78 \end{pmatrix}$

19. Resolver $A \cdot B = C$ siendo:
    $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Calcular el rango de la matriz
    $$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

    Solución: 3

21. Calcular el rango de la matriz
    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

    Solución: 3

22. Calcular el rango de la matriz
    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & -6 \\ 5 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

    Solución: 2

23. Calcular para los distintos valores de a el rango de la matriz
    $$\begin{pmatrix} 9 & a & -1 \\ 4a & -2 & a-1 \\ 5 & 2a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

    Solución: $a \neq -1, 35/9$, ran : 3, otro caso ran : 2

24. Calcular para los distintos valores de t el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Solución: $t \neq 4$, ran : 2, otro caso ran : 1

25. Calcular para los distintos valores de a el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ a & 5 & -a \\ 15 & 5a & -30 \end{pmatrix}$$

Solución: $|A| = -a^2 - 3a + 10,\ a \neq 2, -5$, ran : 3; $a = 2$, ran : 2; $a = -5$, ran : 2

26. Calcular para los distintos valores de a el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ a & -3 & 4 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $|A| = 2a^2 - 3a + 1,\ a \neq 1, 1/2$, ran : 3; $a = 1$, ran : 2; $a = 1/2$, ran : 2

27. Calcular para los distintos valores de t el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & (1+t) & t \end{pmatrix}$$

Solución: $|A| = t^2 - t,\ t \neq 0, 1$, ran : 3; $t = 0$, ran : 2; $t = 1$, ran : 2

28. Definir la característica o rango de una matriz. Calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: 2

29. Calcular para los distintos valores de t el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Solución: 2ª col $= 1^a \times 2$, 3ª col $= 1^a \times 3$, $\forall t$ rango 2

Capítulo 5

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de expresiones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

donde las "x" son las incógnitas, y tanto los coeficientes "a" como los términos independientes "c" son números reales.

nota: Cuando las incógnitas no tienen exponente (o sea tienen exponente 1) se dice que es ecuación lineal.

Consideraremos las matrices: **matriz de coeficientes** **matriz ampliada**

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Se llama **solución** del sistema a todo vector $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que satisfaga las ecuaciones es decir que al sustituir en el sistema se verifican las igualdades:

Clasificación de sistemas por la solución: Resultan las siguientes posibilidades al resolver un sistema:

- Sistema compatible determinado, es decir, con solución única.
- Sistema compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones.
- Sistema incompatible, es decir, no tiene solución.

5.2. Sistemas equivalentes. Método de Gauss de resolución de sistemas

Dos sistemas son **equivalentes** si toda solución del primero lo es del segundo y viceversa.

Teniendo en cuenta que al multiplicar los dos miembros de una igualdad por un número la igualdad subsiste, y de que si se suman varias igualdades resulta otra igualdad. Se tienen las siguientes reglas que permiten pasar de un sistema a otro equivalente más sencillo:

- Se pueden intercambiar dos ecuaciones.
- Se puede multiplicar (dividir) una ecuación por un número distinto de cero.
- A una ecuación se le puede sumar (restar) otra.
- Si hay dos ecuaciones iguales o proporcionales se puede eliminar una.
- Se puede despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en las demás.
- Es equivalente trabajar con las ecuaciones del sistema que trabajar con las filas de la matriz ampliada.

El método de Gauss consiste en triangular la matriz asociada. De esta manera queda un sistema equivalente de cuya última ecuación se puede despejar una incógnita y luego ir sustituyendo los valores de las incógnitas de abajo arriba. Es un procedimiento particular de reducción.

Ejemplo Resolver por el método de Gauss

$$\begin{cases} x-2y=-5 \\ 2y+4z=7 \\ x+y-4z=-8 \\ 3y-4z=-3 \\ -x-y+4z=8 \end{cases} \text{ la matriz asociada es } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

se observa que la quinta fila es la $3^a \times (-1)$, la eliminamos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{cccc} 3^a\text{fila} - 1^a & & & \\ & 1 & 1 & -4 & -8 \\ & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ suprimimos}$$

la última fila,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{cccc} 3^a \times 2 + 2^a \times (-3) & & & \\ 0 & 6 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -12 & -21 \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix}$$

una vez triangulada volvemos a sistema

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2y + 4z = 7 \\ -20z = -27 \end{cases}$$ resulta despejando y sustituyendo de abajo hacia arriba

$z = \dfrac{27}{20}$

sustituyendo en la segunda:

$y = \dfrac{7-4z}{2} = \dfrac{7-4\frac{27}{20}}{2} = \dfrac{4}{5}$

sustituyendo en la primera:

$x = -5 + 2y = -5 + 2\dfrac{4}{5} = \dfrac{-17}{5}$

5.3. Sistemas de Cramer

Un sistema se dice que es del tipo Cramer si tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, y además el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

Un sistema de Cramer tiene solución y es única.

Demostración:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

El sistema matricialmente se puede escribir :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{es decir } M.X = C$$

Como $|M| \neq 0$ M tiene inversa y resolviendo la ecuación matricial resulta $X = M^{-1}.C$.

Y además cada incógnita es igual al determinante formado sustituyendo en el de la matriz de coeficientes su columna por la de términos independientes, partido por el determinante de la matriz de coeficientes.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = -4 \\ 4x + y + 4z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = -5 \end{cases}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-49}{8}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{8} = 6$$

5.4. Teorema de Rouché-Fröbenius

Resuelve el estudio de la resolución de un sistema general de ecuaciones lineales.

Dado un sistema de m ecuaciones y n incógnitas $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$

Sea M la matriz de coeficientes y sea A la matriz ampliada, n es el número de incógnitas.

1^0) La condición necesaria y suficiente para que tenga solución (sea compatible) es que:

$$\text{rango}(M) = \text{rango}(A)$$

Supuesto que este rango es r:

2^0) Si $r = n$, número de incógnitas, el sistema tiene solución única, compatible determinado.

3^0) Si $r < n$, número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones, compatible indeterminado.

Demostración
Veamos que existe solución si y solo si $\text{ran}(M) = \text{ran}(A)$

I) Partimos de que el sistema tiene solución.
Podemos expresar matricialmente el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} .x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} .x_2 + \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} .x_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Si existe solución $s_1, s_2, ...s_n$, sustituyendo las incógnitas por las soluciones en la igualdad anterior, queda expresada la columna de términos independientes en la matriz ampliada como combinación lineal de las otras luego, en consecuencia $\text{ran}(M) = \text{ran}(A)$.

II) Partimos ahora de que $\text{ran}(M) = \text{ran}(A) = r$, sin restar generalidad podemos suponer que el menor de orden r no nulo que da el rango incluye las r primeras ecuaciones y las r primeras incógnitas

$$\left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & a_{1r}| & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots| & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}| & \cdots & a_{rn} & c_r \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

esto quiere decir que las $m - r$ filas restantes de la matriz A son combinación lineal de las otras, luego las podemos eliminar, por tanto el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = c_r \end{cases}$$

y pasando al segundo miembro los sumandos correspondientes a las incógnitas $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$, queda:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

que es un sistema tipo Cramer y por tanto tiene solución, presentándose dos casos:

a) Si $r = n$, el segundo miembro de las ecuaciones se reduce a los términos independientes c_j y el sistema tiene solución única.

b) Si $r < n$, las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_r$, quedan en función de las restantes $x_{r+1}, \ldots, x_n$, que se pueden considerar como parámetros y dándoles valores arbitrarios se obtienen infinitas soluciones.

Resumiendo: Discusión de un sistema por el teorema de Rouché

$\text{ran}(M) \neq \text{ran}(A)$ sist. INCOMPATIBLE

$\text{ran}(M) = \text{ran}(A) = r$ sist. COMPATIBLE $\begin{array}{l} r = n^0 \text{ incógnitas DETERMINADO} \\ r < n^0 \text{ incógnitas INDETERMINADO} \end{array}$

Ejemplos de sistemas sin parámetros

1. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = -4 \\ 4x + y + 4z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = -5 \\ 4x - 3y + 5z = 4 \\ -2y + z = 5 \end{cases} \text{ formamos la matriz:}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \text{eliminamos la } 4^a \text{ fila}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3^a(-2) + 2^a \\ 4^a(-2) + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right) \text{eliminamos la } 4^a \text{ fila} \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

luego $\text{Rango}(M) = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^0$ incógnitas, sistema compatible determinado

Para resolverlo queda el sistema equivalente: $\begin{cases} 4x + 5y + 3z = -4 \\ -4y + z = 4 \\ z = 6 \end{cases}$ que resuelto sustituyendo o por Cramer da: $x = -49/8; y = 1/2; z = 6$

2. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} x+y-z+t=4 \\ 2x-y+3z+2t=-1 \\ -4x+5y-11z-4t=11 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -11 & -4 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a+1^a\cdot(-2) \\ 3^a+1^a\cdot 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & -15 & 0 & 27 \end{array}\right) 3^a+2^a\cdot 3 \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ eliminamos la última ecuación, queda rango $=2$

$\text{ran}(M)=2=\text{ran}(A)<4=\text{n}^0$ incógnitas: sistema compatible indeterminado.

Dejando x e y en el primer miembro y considerando la última matriz resulta: $\begin{cases} x+y=4+z-t \\ -3y=-9-5z \end{cases}$

aplicando Cramer a x, la y es directamente $y=\dfrac{9+5z}{3}$; $\quad x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4+z-t & 1 \\ -9-5z & -3 \end{vmatrix}}{-3}=\dfrac{-3+2z+3t}{-3}$

3. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=-2 \\ 5x-4y=7 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

es inmediato que $\text{ran}(M)=2$, veamos la ampliada $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}=24\neq 0$

$\text{ran}(M)=2\neq 3=\text{ran}(A)$, sistema incompatible.

Ejemplos de sistemas con parámetros

1. Discutir según los valores de k el sistema, y resolver en caso de indeterminación:

$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ x-2y-kz=-1 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

Matriz asociada: $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -k & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

El sistema es "horizontal", formamos el mayor determinante posible con la matriz de coeficientes y hallaremos los valores de k que lo anulan:

$|M|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3k-15$ Se anula para $k=5$

- Para $k\neq 5$ $\text{ran}(M)=3=\text{ran}(A)$, compatible determinado.

  Estudiamos para $k=5$, ya es una matriz numérica, resulta:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Formamos un menor de orden 3 de A, orlando uno de orden 2 no nulo:

$\left|\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 0$,no hay mas posibilidades por tanto el rango de A es dos:

- Para $k = 5$ $\text{ran}(M) = 2 = \text{ran}(A)$, compatible indeterminado.

  $\begin{cases} 2x - y = 1 + 3z \\ x - 2y = -1 + 5z \end{cases}$ resolviendo por Cramer, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+3z & -1 \\ -1+5z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = 1 + \frac{z}{3}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+3z \\ 1 & -1+5z \end{vmatrix}}{-3} = 1 - \frac{7z}{3}$$

  la solución es $\begin{cases} x = 1 + \frac{z}{3} \\ y = 1 - \frac{7z}{3} \\ z \in R \end{cases}$

2. Discutir según los valores de α el sistema:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases} \qquad \text{Matriz asociada: } \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2$, resolviendo $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$, por Ruffini da $\alpha = 1$ doble , $\alpha = -2$

- Para $\alpha \neq 1$, o $\alpha \neq -2$, $\text{ran}(M) = 3 = \text{ran}(A)$, compatible determinado.
- Para $\alpha = 1$ matriz toda de unos, $\text{ran}(M) = 1 = \text{ran}(A)$, compatible indeterminado, soluciones dependientes de 2 parámetros: $x = 1 - y - z$.

  Estudiemos para $\alpha = -2$, queda la matriz ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$

  $\text{ran}(M) = 2$, el menor de la ampliada $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ Por tanto: ran(A) = 3 por tanto:
- Para $\alpha = -2$, $\text{ran}(M) = 2 < 3 = \text{ran}(A)$, sistema incompatible.

3. Discutir según los valores de k: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + kz = k \\ x + y + kz = k^3 \end{cases}$

como $|M| = 0$ para todo k estudiamos el determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & k & k^3 \end{vmatrix} = k(k^3 - k^2 - k + 1)$ resulta por Ruffini que se anula para $k = 0$, $k = 1$ doble, y $k = -1$. Entonces:

Para $k \neq 0, 1, -1$ incompatible.

Para $k = 0$ queda la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{ran}(M) = 2 = \text{ran}(A) < 3$ compatible indeterminado.

Para $k = 1$ queda la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{ran}(M) = 1 = \text{ran}(A) < 3$ compatible indeterminado.

Para $k = -1$ queda la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\text{ran}(M) = 2 = \text{ran}(A) < 3$ compatible indeterminado.

4. Discutir según los valores de α y β, resolviéndolo cuando sea posible

$$\begin{cases} \alpha x + 2y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 2 \\ 2x + \beta y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 2| & 1 \\ 1 & 2| & 3 \\ -1 & 3| & 2 \\ 2 & \beta| & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es "vertical", formamos los mayores determinantes posibles con la matriz ampliada y hallamos los valores de α y β que los anulan:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\alpha - 5; \alpha = -1$$

Para $\alpha \neq -1, \forall\beta$, $\text{ran}(M) = 2 < 3 = \text{ran}(A)$, incompatible

Para $\alpha = -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & \beta & 0 \end{vmatrix} = -5\beta - 10; \beta = -2$$

Luego si $\alpha = -1, \beta \neq -2$, $\text{ran}(M) = 2 < 3 = \text{ran}(A)$, incompatible

para $\alpha = -1$ y $\beta = -2$, se tiene: $\text{ran}(M) = 2 = \text{ran}(A) = \text{n}^0$ incógnitas, sistema compatible determinado.

Eliminamos las dos últimas ecuaciones y queda el sistema:

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \quad \text{resolvemos por Cramer y resulta } x=1, y=1$$

Conclusión: Para resolver un sistema numérico se triangula hasta donde se vea conveniente y se aplica Cramer.

Para discutir un sistema con parámetros se hace el determinante más grande posible, si es bastante con la matriz de coeficientes, en otro caso con la matriz ampliada.

5.5. Sistemas homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo cuando todos los términos independientes son ceros:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Rouché necesariamente $\text{ran}(M) = \text{ran}(A) = r$, luego siempre tiene solución.

Si $r = \text{n}^0$ incógnitas existe solución única, la trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

Si $r < n^0$ incógnitas, existen infinitas soluciones, dependientes de $n - r$ parámetros.

Ejemplo Resolver según los valores de α $\begin{cases} x+y-z=0 \\ \alpha x+3y+z=0 \\ 4x+5y-z=0 \end{cases}$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \alpha & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -4\alpha + 8 = 0$ se anula para $\alpha = 2$

para $\alpha \neq 2$, $\text{ran}(M) = 3 = n^0$ incógnitas, solución trivial $x = y = z = 0$

para $\alpha = 2$, $\text{ran}(M) = 2 < n^0$ incógnitas, eliminamos la última ecuación y pasamos la z al otro miembro: $\begin{cases} x+y=z \\ 2x+3y=-z \end{cases}$ resolviendo por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 4z, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & -z \end{vmatrix}}{1} = -3z$$

CONTINUACION DE ESPACIOS VECTORIALES

5.6. Independencia lineal, base.

- Para ver cuantos vectores de un conjunto son linealmente independientes basta hallar el rango de la matriz formada por ellos.
- Tres vectores del espacio vectorial R^3 forman base sii su determinante no es cero.
- Cuando se escribe un vector como c.l. de los vectores de una base, a los coeficientes de la c.l. se les llama **coordenadas** de ese vector en esa base.

Ejemplos

1. $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ es la base natural o canónica de R^2, y por ejemplo el vector $\vec{v} = (3,-2)$ de R^2 se puede escribir $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

   $\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$ es la base canónica de R^3.

2. Demostrar que los vectores $(3,2,1), (0,2,4), (3,7,1)$ forman base.

3. Comprobar si el vector $(1,2,3)$ se pueden escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (4,5,6), \vec{b} = (7,8,9)$

   Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son l.i. hacemos $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ que expresa que el primer vector es c.l. de los dos últimos.

   Nota: Obsérvese que nos han dicho comprobar, **no** escribir como c.l.

4. Sabiendo que el vector $\vec{v} = (1,2,3)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (4,5,6), \vec{b} = (7,8,9)$, escribir $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

   $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}; \quad (1,2,3) = x(4,5,6) + y(7,8,9)$, separando coordenadas $\begin{cases} 1 = 4x + 7y \\ 2 = 5x + 8y \\ 3 = 6x + 9y \end{cases}$

   Como $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, el sistema es equivalente a: $\begin{cases} 4x + 7y = 1 \\ 5x + 8y = 2 \end{cases} \quad x = 2, y = -1.$

   Por tanto $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$

5. Escribir el vector $(3,5,2)$ como combinación lineal de los vectores de la base formada por $(1,2,5), (6,2,1), (3,1,2)$

   Ponemos nombre a los vectores:

   $\vec{v} = (3,5,2)$, base: $\vec{a} = (1,2,5), \vec{b} = (6,2,1), \vec{c} = (3,1,2)$

   Planteamos la c.l.: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Entonces separando coordenadas resulta el sistema:

$$\begin{cases} x + 6y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ 5x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

que resuelto da las soluciones: $x = 12/5, y = 52/15, z = -101/15$

la combinación lineal es: $\vec{v} = \dfrac{12}{5}\vec{a} + \dfrac{52}{15}\vec{b} - \dfrac{101}{15}\vec{c}$

6. Si los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de R^3 forman base ¿son los vectores $\vec{u}+\vec{w}, \vec{w}-2\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ linealmente independientes?

   A partir de las coordenadas de los nuevos vectores en la base dada hacemos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ luego son l.i.

7. Dados los vectores $(2, 1, 3), (5, 2, -1)$ completar una base de R^3

   El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ por tanto el vector $(1, 0, 0)$ sirve para completar la base.

8. Dados los vectores $\vec{a} = (2, k, 1), \vec{b} = (4, 3, -5), \vec{c} = (k, -2, 3)$

   I) Determinar para que valores de k forman base.

   II) Decir cuando el vector $\vec{v} = (5, 0, -1)$ se puede escribir como combinación lineal de ellos.

   III) Para $k = 0$, escribir, si es posible, el vector $\vec{v} = (5, 0, -1)$ como combinación lineal de ellos.

   IV) Para $k = -1$, escribir, si es posible, el vector $\vec{v} = (5, 0, -1)$ como combinación lineal de ellos.

   I) El determinante $\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ k & -2 & 3 \end{vmatrix} = -5k^2 - 15k - 10$, que se anula para $k = -2, k = -1$

   Por tanto los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ forman base para $k \neq -2, k \neq -1$

   II) Planteamos la c.l.: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

   Entonces separando coordenadas resulta el sistema:

   $\begin{cases} 2x + 4y + kz = 5 \\ kx + 3y - 2z = 0 \\ x - 5y + 3z = -1 \end{cases}$ la matriz de coeficientes es la traspuesta de la del apartado anterior por tanto con igual determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & k \\ k & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -5k^2 - 15k - 10$$

Para $k \neq -2, k \neq -1$, rango(M)= 3=rango(A), sistema compatible determinado, por tanto se puede escribir la combinación lineal de manera única para cada valor de K

Para $k = -2$ queda la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ incluye el determinante:

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 21$, luego rango(M)= $2 < 3 =$ rango(A) , el sistema es incompatible, luego **no** se puede escribir $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Para $k = -1$ queda la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ el determinante:

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$, luego rango(M)= $2 =$ rango(A) , el sistema es compatible indeterminado, luego se puede escribir $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de infinitas maneras dependientes de un parámetro.

III) Para $k = 0$, separando coordenadas resulta el sistema:

$\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 3y - 2z = 0 \\ x - 5y + 3z = -1 \end{cases}$ del que sabemos que es compatible determinado, resolviendo por Cramer resulta: $x = -\frac{3}{10}, y = \frac{7}{5}, z = \frac{21}{10}$

Queda: $\vec{v} = -\dfrac{3}{10}\vec{a} + \dfrac{7}{5}\vec{b} + \dfrac{21}{10}\vec{c}$

IV) Para $k = -1$, separando coordenadas resulta el sistema:

$\begin{cases} 2x + 4y - z = 5 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ x - 5y + 3z = -1 \end{cases}$ del que sabemos que es compatible indeterminado, resolviendo resulta $x = -\frac{t-3}{2}, y = \frac{t+1}{2}, z = t$

Queda: $\vec{v} = -\dfrac{t-3}{2}\vec{a} + \dfrac{t+1}{2}\vec{b} + t\vec{c}, \quad t \in R$

5.7. Problemas

1. Resolver por el método de Gauss

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = -3 \\ 2x - y + z = -4 \\ 3x + y + 2z = -4 \end{cases}$$

Solución: $x = -5/2, y = 1/2, z = 3/2$

2. Resolver por el método de Gauss

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 4t = -4 \\ -x - y + 2z - 3t = -4 \\ 7x - 7y - 5t = -4 \end{cases}$$

Solución: $y = \frac{16-13t+7z}{7}, x = \frac{12-8t+7z}{7}, z, t \in R$

3. Resolver por Cramer

$$\begin{cases} -5x - 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 4 \\ 3x - 4z = -3 \end{cases}$$

Solución: $x = -25/21, y = 122/63, z = -1/7$

4. Resolver

$$\begin{cases} -x + 4y + 4z = 3 \\ 6x - y = -4 \\ -5x - 3y - 4z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Solución: $x = -3, y = -14, z = 14$

5. Estudiar el sistema de ecuaciones lineales que tiene de matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -7 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 4/7, y = -6/7, z = 1/7$

6. Resolver $\begin{cases} -x + 3y - 2z = -19 \\ -4x + y + 5z = -4 \\ 3x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$

Solución: $4, -3, 3$

7. Resolver $\begin{cases} 4x + 5y + 5z = 21 \\ 3x - y + 2z = 8 \\ 5x + 4y - z = 29 \end{cases}$

Solución: $4, 2, -1$

8. Resolver $\begin{cases} -6x - 5y + 9z = 9 \\ -47x - 39y + 58z = 62 \\ 5x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 41 - 61z, \quad y = 75z - 51$

9. Resolver $\begin{cases} 2x + 9y - 3z = -9 \\ -16x - 78y + 26z = 42 \\ -x - 6y + 2z = -3 \end{cases}$

Solución: $x = -27, \quad y = \dfrac{z + 15}{3}$

10. Resolver

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 5x - 4z = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Solución: incompatible

11. Dados los puntos (-1,4), (1,-2) y (5,3). Hallar La parábola que pasa por los tres puntos.

Solución: $y = \frac{17}{24}x^2 - 3x + \frac{7}{24}$

12. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ty + z = 0 \\ x + (1+t)y + tz = t + 1 \end{cases},$$

determinar t, de modo que:

a) el sistema tenga solución única

b) el sistema tenga infinitas soluciones

c) el sistema no tenga solución

Solución: $|M| = t^2 - t$, a) $t \neq 0, 1$, compatible det;, b) $t = 0$, indet, 1 param $x = 1 - y, z = 0$; $t = 1$ incomp.

13. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de t
$$\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-tz=2 \\ x+y+tz=10 \end{cases}$$
Solución: $t \neq 8$, comp. det; $t=8$, comp. indet

14. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a
$$\begin{cases} x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2(a+1) \\ ax+y+z=a \end{cases}$$
Solución: $a \neq 1,-2$, comp. det, $a=1$, incomp., $a=-2$ comp. indet

15. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de k y resolverlo cuando sea posible.
$$\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=k \end{cases}$$
Solución: $k \neq 4$, incomp., $k=4$, comp. indet $x=\dfrac{-5+14z}{2}, y=\dfrac{-3+8z}{2}$

16. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de m
$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ x-3z=8 \\ y-2z=4 \\ 2x-my=1 \end{cases}$$
Solución: $|A|=12m-36, m \neq 3$ incomp., $m=3$ incomp., en resumen $\forall m$ resulta incompatible

17. Resolver el sistema
$$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 2x_1-x_2=1 \\ 4x_1+3x_2=k \end{cases}$$
para los valores de k que lo hagan compatible.

Solución: $k=7, x_1=1, x_2=1$

18. Calcular a para que sea compatible el sistema y resolverlo
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y-3z=8 \\ ax-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$$
Solución: $|A|=16-8a, a \neq 2$ inc; $a=2$, comp. det. $x=1, y=2, z=-1$

19. Calcular a para que sea compatible el sistema y resolverlo
$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$$
Solución: $a=-8, x=\frac{\lambda}{19}, y=\frac{7\lambda}{19}, z=\lambda, \lambda \in R$; si $a \neq -8$ solución trivial

20. Averiguar para qué valores de m el sistema
$$\begin{cases} x+my=0 \\ x+m^2y=0 \end{cases}$$
admite soluciones distintas de la trivial.

Solución: $|M|=m^2-m$; $m \neq 0,1$ sol trivial; $m=0,1$, un parámetro

21. Calcular a para que sea compatible el sistema y resolverlo
$$\begin{cases} ax+2y-4z=-2 \\ -2x-y-3z=-3 \\ -5x-5z=-4 \\ x+2y=1 \end{cases}$$
Solución: $|A|=-a-6, a=-6, a \neq -6$ inc; $a=-6$, comp. det. $x=-1/15, y=8/15, z=13/15$

22. Discutir según los valores de k, resolviendo en caso de indeterminación
$$\begin{cases} x+y+kz=1 \\ y+kz=k \\ y+kz=k^3 \end{cases}$$
Solución: excepción a mayor det de mat coef, se usa ampliada, $k=0 : x=1, y=0, z \in R$; $k=1 : y=1-z, x=0, z \in R$; $k=-1 : x=2, y=z-1, z \in R$

23. Calcular a para que sea compatible el sistema y resolverlo

$$\begin{cases} ax + 11y + 7z = 5 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 3 \\ 5x + 7y + 11z = 13 \end{cases}$$

Solución: $|A| = 78 - 6t, a = 13, a \neq 13$ inc; $a = 13$, comp. det. $[x = -1, y = 1, z = 1$

24. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ 3x - y + az = 0 \end{cases}$$

Solución: $a = -2$

25. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a.

$$\begin{cases} (4-a)x + 2y + z = 0 \\ 2x + (4-a)y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + (8-a)z = 0 \end{cases}$$

Solución: $a = 4, \quad 6 \pm 3\sqrt{2}$

26. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Solución: $a = -2 \quad inc, a = 1ci$, resto cd

27. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x + 11y + 9z = a \end{cases}$$

Solución: $\forall a$ comp det

28. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a, resolverlo cuando sea posible.

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + 2y + z = a \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$

Solución: siempre cd, $x = y = z = a/4$

29. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a y resolverlo.

$$\begin{cases} 4x + 2y = a \\ x + y - z = 2 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

Solución: $a = 3 \quad ci \quad x = -\frac{1}{2} - z; y = \frac{5}{2} + 2z, a \neq 3 \quad cd \quad x = -1, y = 2 + \frac{a}{2}, z = -1 + \frac{a}{2}$

30. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} 4x + 2y = a \\ x + y - z = 2 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$$

Solución: $a = 3 \quad inc, a \neq 3 \quad cd$

31. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} ax + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = a \end{cases}$$

Solución: $a = -3 \quad inc, a \neq -3 \quad cd$

32. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + az = 1 \\ x + 2y = a \end{cases}$$

Solución: $a = -1 \quad inc, a \neq -1 \quad cd$

33. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$

Solución: siempre cd

34. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a

$$\begin{cases} 4x + 2y = a \\ x + y - z = 2 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$$

Solución: $a = 3 \quad inc, a \neq 3 \quad cd$

35. Discutir el sistema de ecuaciones para los distintos valores de a y resolverlo

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

Solución: $a = -\frac{1}{2} \quad ci; y = 2x - 4; a \neq -\frac{1}{2} \quad c. \quad d., x = 2, y = 0$

36. En una compañía envasan los bombones en cajas de 250 gr, 500 gr y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr) que de tamaño mediano (500 gr). Sabiendo que el precio del kilo de bombones es de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1250 euros, ¿cuántas cajas se han envasado de cada tipo?

Solución: 25, 20, 15

37. Encontrar tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

Solución: 50, 40, 120

38. Dados los vectores $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (3, 1, 2)$, $\vec{c} = (-1, -3, 1)$. Comprobar que forman base, y en ese caso hallar las coordenadas del vector $\vec{v} = (-6, -6, -3)$ en la base formada por ellos.

$(2, -3, 1)$

Capítulo 6

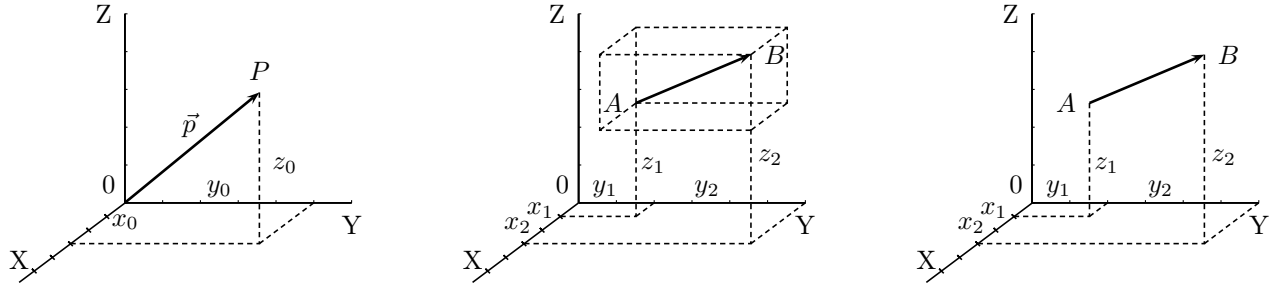
ESPACIOS AFÍN Y EUCLÍDEO

6.1. Espacio afín

Consideremos el espacio dotado de un sistema de coordenadas $OXYZ$.

Dado un par de puntos $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ queda determinado un vector de R^3,:
$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, es decir las coordenadas del vector son las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

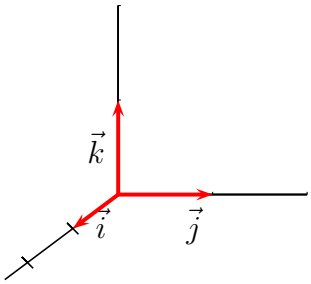
En particular dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, se llama vector de posición del punto P al vector $\vec{OP} = (x_0, y_0, z_0)$, se representa por la misma letra del punto minúscula $\vec{p}$.



Se llama espacio afin real tridimensional al espacio ordinario asociado al espacio vectorial R^3 mediante la aplicación que a cada par de puntos A, B le asocia el vector $\vec{AB}$.

6.2. Sistema de referencia

Se llama sistema de referencia del espacio afin a una cuaterna $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ en la que O es un punto al que se llama origen y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es base del espacio vectorial R^3.

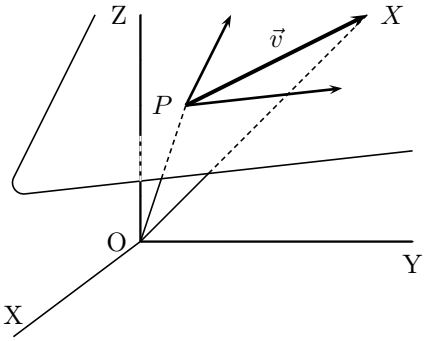


Así el sistema de referencia asociado a los ejes de coordenadas es $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de R^3, $\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Dado un punto del espacio $P(x_0, y_0, z_0)$, su vector de posición es $\vec{OP} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$.

Los vectores de la base canónica se suelen representar también respectivamente por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

6.3. Subespacio afín



Dados un punto P y un subespacio vectorial V de R^3, se llama subespacio afín determinado por el punto P y la variedad dirección V, al conjunto de puntos X dados por:
$\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$, con $\vec{v} \in V$.
Si $V = \{\vec{0}\}$ el subespacio afín se reduce al punto P
Si V está generada por 1 vector, el subespacio afín es una recta
Si V está generada por 2 vectores, el subespacio afín es un plano
Si V está generada por 3 vectores, el subespacio afín es todo el espacio

Ejemplo Hallar k de manera que el punto de $A(5,3,k)$ pertenezca al subespacio afín determinado por el punto$P(1,2,-1)$ y la variedad dirección generada por los vectores $\vec{u} = (3,-1,0)$ y $\vec{v} = (2,0,1)$

$\vec{OA} = \vec{OP} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$(5,3,k) = (1,2,-1) + \lambda(3,-1,0) + \mu(2,0,1); \quad (5,3,k) - (1,2,-1) = \lambda(3,-1,0) + \mu(2,0,1)$

por tanto el determinante $\begin{vmatrix} 5-1 & u_1 & v_1 \\ 3-2 & u_2 & v_2 \\ k+1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ k+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2k-5 = 0; \quad k = \dfrac{5}{2}$

6.4. Producto escalar

Dados dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de R^3, definimos producto escalar de esos dos vectores $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, el resultado es pues un número

Propiedades:

1) Distributiva $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

2) Pseudoasociativa $(\alpha\vec{a}).\vec{b} = \alpha(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(\alpha\vec{b})$

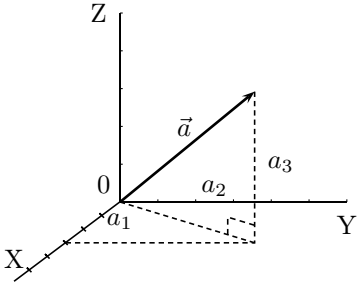
3) Conmutativa $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

4) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$
5) $\vec{a}.\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. para $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$; $\alpha \in R$

R^3 espacio vectorial con el producto escalar así definido se llama **espacio vectorial euclídeo**.

Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$, módulo de $\vec{a}$ es la raíz cuadrada del producto escalar por sí mismo:

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, es la longitud del vector.



Un vector se dice **unitario** cuando su módulo es 1
Propiedades:
1) $|\vec{a}| \geq 0$
2) $|\vec{a}| = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
3) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|.|\vec{a}|, \quad \forall \vec{a} \in R^3, \alpha \in R$

Ángulo de dos vectores Dados $\vec{a}, \vec{b}$ dos vectores de R^3 no nulos se llama ángulo de esos dos vectores al ángulo ϕ formado por dos semirrectas que los contienen, se verifica:

$$\boxed{\cos\phi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

Ejemplo Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, 3, 5); \vec{v} = (5, -6, +1)$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{10 - 18 + 5}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{62}} = \frac{-3}{\sqrt{2356}} = -0'0618; \quad ang(\vec{u}, \vec{v}) = 93'49^0$$

Consecuencias

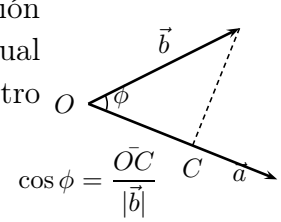
1. **Definición clásica de producto escalar** $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\phi$

2. Dos vectores son **ortogonales** (perpendiculares) si y solo si su producto escalar es 0.

3. Se verifica $\vec{x}^2 = \left(|\vec{x}|\right)^2$

4. Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$:

   Como $|\vec{b}|\cos\phi$ es la proyección $\bar{OC}$ del vector $\vec{b}$ sobre la dirección del $\vec{a}$ podemos decir que el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos multiplicado por la proyección del otro sobre él.



$$\cos\phi = \frac{\bar{OC}}{|\vec{b}|}$$

5. **Base ortonormal** es toda base formada por vectores unitarios ortogonales.

6. Dado un vector $\vec{v}$, si lo dividimos por su módulo obtenemos un vector unitario de igual dirección y sentido: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

7. Se cumplen las siguientes desigualdades: dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ de R^3

   1) $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ desigualdad de Schwarz
   2) $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ desigualdad de Minkowski

   Demostración vista en el curso pasado.

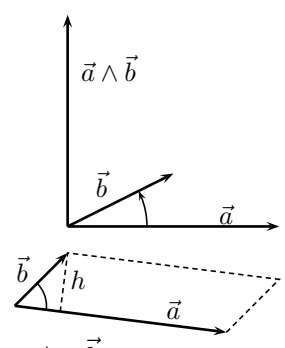
Ejemplo Dados dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ tales que sus módulos valen 3 y forman un ángulo de 30^0, hallar $\vec{a}.\vec{b}$ siendo $\vec{a} = 3\vec{x} - 2\vec{y}, \quad \vec{b} = 5\vec{x} + 3\vec{y}$.

$\vec{a}.\vec{b} = (3\vec{x} - 2\vec{y})(5\vec{x} + 3\vec{y}) = 15\vec{x}^2 - 6\vec{y}^2 - \vec{x}.\vec{y} = 15|\vec{x}|^2 - 6|\vec{y}|^2 - |\vec{x}|.|\vec{y}|\cos 30^0 =$
$15 \cdot 9 - 6 \cdot 9 - 9.\cos 30^0 = 81 - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

6.5. Producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de R^3, definimos producto vectorial de esos dos vectores:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



el producto vectorial es un vector ortogonal a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y sentido dado por la regla del tornillo, que tiene de módulo:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen}(\vec{a}, \vec{b})$$

Consecuencia: $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ es el área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejemplo Dados los vectores (1,3,-1), (3,-1,0), comprobar que son ortogonales. Completar a partir de ellos una base ortonormal.

Producto escalar: $(1, 3, -1).(3, -1, 0) = 0$, son ortogonales

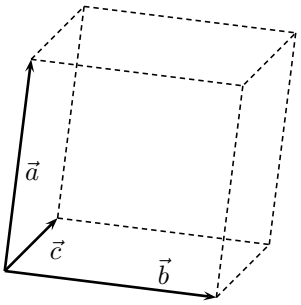
Para obtener el vector que falta perpendicular a los dos hacemos el producto vectorial

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 10\vec{k} \quad \text{vector: } (-1, -3, -10)$$

Dividiendo por los módulos hacemos los vectores unitarios y obtenemos la base ortonormal: $\dfrac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, -1), \quad \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3, -1, 0), \quad \dfrac{1}{\sqrt{110}}(-1, -3, -10)$

6.6. Producto mixto

Dados tres vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ de R^3, definimos producto mixto, que se representa por $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ de esos tres vectores:
Como
$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$
Cuyo resultado es
$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
Por tanto el producto mixto de tres vectores del espacio viene dado por el determinante de sus coordenadas.



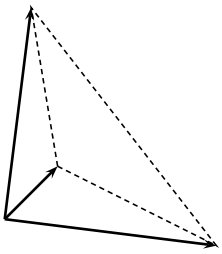
El producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo que determinan. Esto se deduce de que:

$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})| = |\vec{a}|.|\vec{b} \wedge \vec{c}|$. proyección de $(\vec{b} \wedge \vec{c})$ sobre $\vec{a}$ = área de la base por altura.

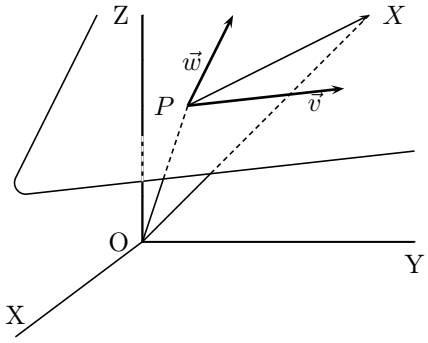
El volumen del tetraedro que determinan tres vectores es el producto mixto dividido por seis. Recordemos que las pirámides tienen como volumen un tercio del área de la base por la altura. La base triangular es la mitad del paralelogramo. Por tanto el volumen pedido es el producto mixto dividido por seis.

Ejemplo Hallar el volumen del tetraedro que determinan los vectores $(1, 6, -1), (-3, 2, 1), (-1, 1, 5)$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{94}{6} = \frac{47}{3} u^3$$



6.7. Ecuaciones del plano



Sea el plano determinado por el punto P y el subespacio vectorial engendrado por los vectores $\vec{v}, \vec{w}$.
Sea X un punto cualquiera del plano.
Se verifica $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$, como $\vec{PX}$ es comb. lin. de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, $\quad \vec{PX} = t\vec{v} + s\vec{w}$ por tanto
$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} + s\vec{w}$ con $t, s \in R$
Pasando a coordenadas si $P(x_0, y_0, z_0), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ y suponemos que $X(x, y, z)$ se tiene:

$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3), \quad t, s \in R}$ ecuación vectorial del plano

Ejemplo $P(1,-2,0), \vec{v}=(0,2,0), \vec{w}=(-3,0,1)$
$(x,y,z)=(1,-2,0)+t(0,2,0)+s(-3,0,1) \quad t,s \in R$

Separando coordenadas: $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y = y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z = z_0 + tv_3 + sw_3 \end{cases} \quad t,s \in R}$ ecuaciones paramétricas del plano

Ejemplo $\begin{cases} x = 1-3s \\ y = -2+2t \\ z = s \end{cases} \quad t,s \in R$

Como $\vec{PX}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios, o sea l.d., el determinante formado por sus coordenadas es 0.

$\det(\vec{PX},\vec{v},\vec{w}) = \boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0}$ ecuación matricial del plano

Ejemplo $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

nota: si dan **tres puntos** del plano no alineados P, Q, R basta considerar que $\vec{PQ}, \vec{PR}$ son dos vectores del plano.

Ejemplo Plano que pasa por P(3,2,-1) , Q(0,1,0), R(7,-5,2).

Considerando los vectores $\vec{QP}=(3,1,-1), \vec{QR}=(7,-6,2)$ $\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 1 & -1 \\ 7 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$

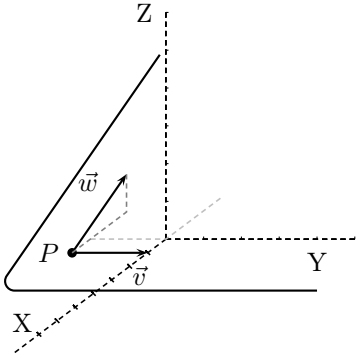
Desarrollando el determinante resulta $4x+13y+25z-13=0$.

En general de la ecuación matricial llegaríamos a un resultado de la forma:

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ ecuación general o cartesiana del plano

Ejemplo

$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-1)+6z; \quad 2x+6z-2=0$



Observaciones

1. En las ecuaciones en forma vectorial, paramétricas, y matricial del plano aparecen explícitamente un punto y dos vectores del plano.

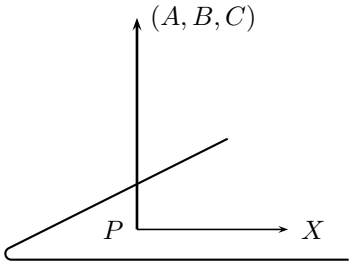
   Ejemplo: Dado el plano $\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 1 \end{cases}$ los términos independientes dan el punto (0,0,1) los coeficientes de cada parámetro dan sendos vectores del plano (1,0,0), (0,1,0)

2. Para comprobar si un punto Q pertenece a un plano

   a) Si el plano está en forma general se sustituye para ver si cumple la igualdad.

   b) Si el plano viene dado por un punto P y dos vectores dirección $\vec{u}, \vec{v}$, se ve si el determinante $[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$ es cero.

3. En la ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano, por tanto verifica la ecuación es decir:
   $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$; entonces restando las dos igualdades tenemos $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ donde $\vec{PX} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ es un vector contenido en el plano,la igualdad anterior expresa que su producto escalar por el vector (A, B, C) es cero
   luego en la ecuación general:
   los coeficientes A, B, C son las coordenadas de un **vector perpendicular al plano**.



   Ejemplo Hallar la ecuación del plano paralelo al $2x-3y+z=7$ que pasa por el punto (0,4,0).

   Si es paralelo sirve el mismo vector ortogonal por tanto los coeficientes de x, y, z pueden ser los mismos $2x - 3y + z + D = 0$

   Haciendo que pase por el punto $-3 \cdot 4 + D = 0$; $D = 12$, luego el plano buscado es $2x - 3y + z + 12 = 0$.

   Ejemplo Hallar las ecuaciones paramétricas del plano $2x + 3y - 5z - 2 = 0$

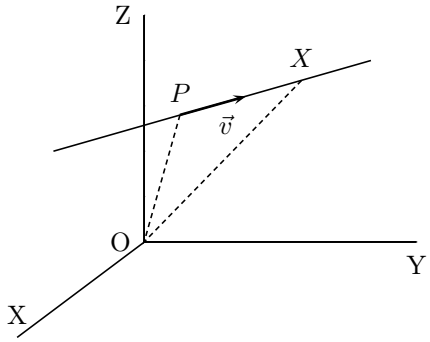
   Basta pasar dos variables al 2^0 miembro y considerarlas como parámetros:

   $$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \frac{-2}{5} + \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}\beta \end{cases}$$

   por tanto un punto es (0,0,-2/5)
   y dos vectores dirección son (1,0,2/5); (0,1,3/5)

4. Ecuación segmentaria del plano: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

6.8. Ecuaciones de la recta



Sea la recta determinada por el punto P y el subespacio vectorial engendrado por el vector $\vec{v}$.
Sea X un punto cualquiera de la recta. Se verifica $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$, como $\vec{PX}$ pertenece al sev. engendrado por $\vec{v}$, $\vec{PX} = t\vec{v}$ por tanto $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} \quad t \in R$
Pasando a coordenadas si $P(x_0, y_0, z_0), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y suponemos que $X(x, y, z)$ se tiene:

$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \quad t \in R}$ ecuación vectorial de la recta
Ejemplo $P(1, -2, 0), \vec{v} = (0, 2, 0)$

$(x, y, z) = (1, -2, 0) + t(0, 2, 0), \quad t \in R$

Separando coordenadas: $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \qquad t \in R \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}}$ ecuaciones paramétricas de la recta

Ejemplo $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 2t \qquad t \in R \\ z = 0 \end{cases}$

Eliminando t entre las tres ecuaciones (despejando t) se tiene:

$\boxed{\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}}$ ecuación continua de la recta

Ejemplo "$\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{0}$"(se admite en este contexto la notación simbólica "partido por 0")

Quitando denominadores llegamos a expresiones del tipo:

$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ que es dar la recta como intersección de dos planos

Ejemplo $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-5}{0}$ se puede expresar $\begin{cases} -2(x-1) = 3(y+2) \\ z - 5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

Observaciones

1. En las ecuaciones en forma vectorial, paramétricas, y continua de la recta aparecen explícitamente un punto y un vector dirección de la recta.

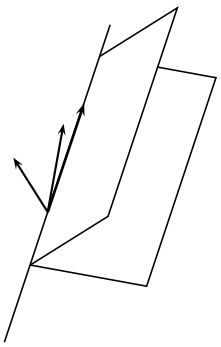
   Ejemplo $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ z = z \end{cases}$ punto (1,0,0); vector dirección (0,1,1)

2. Para comprobar si un punto Q pertenece a una recta r dada por punto P y vector dirección $\vec{v}$ lo más sencillo es ver si $\vec{PQ}$ es proporcional a $\vec{v}$.

3. Para pasar de la recta como intersección de dos planos a las formas en que aparecen un punto y un vector dirección veremos dos procedimientos:

   Ejemplo

   $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 3z + 6 = 0 \end{cases}$ vector (2,-3,0) es perpendicular a la recta; vector (4,0,-3) es perpendicular a la recta

   Modo I: Haciendo el producto vectorial obtenemos:

   $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$ dividiendo por 3 por comodidad, da: (3,2,4) como vector dirección

   un punto lo obtenemos haciendo por ej. $x = 0$, resulta $y = 1/3, z = 2$,el punto es $(0, 1/3, 2)$

   Modo II: el otro método es resolver el sistema indeterminado:

Pasando por ejemplo x al otro miembro $\begin{cases} 3y = 1 + 2x \\ 3z = 6 + 4x \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x \\ z = 2 + \frac{4}{3}x \end{cases}$ queda

$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x \\ z = 2 + \frac{4}{3}x \end{cases}$ punto $(0, \dfrac{1}{3}, 2)$
vector dirección $(1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, multiplicando por 3: (3,2,4)

Ejemplos

1. Comprobar si la recta cuyos puntos tienen de coordenadas $(2+3t, 1-t, t)$, $\quad t \in R$ es paralela al plano $x + y - 2z + 10 = 0$

   La recta viene dada en una variante de paramétricas. Para comprobar que recta y plano son paralelos vamos a hacerlo de dos formas:

   - Sustituyendo las paramétricas de la recta en el plano y resolviendo en t : $\quad (2 + 3t) + (1 - t) - 2t + 10 = 0; \quad 0 + 13 = 0$ sin solución, luego son paralelos.
   - Veamos que el vector dirección de la recta $\vec{v} = (3, -1, 1)$ es perpendicular al vector ortogonal del plano $\vec{u} = (1, 1, -2)$ para ello hacemos el producto escalar $\vec{v}.\vec{u} = 3-1-2 = 0$, luego son ortogonales. Además sustituyendo el punto $(2, 1, 0)$ de la recta en la ecuación del plano resulta $2 + 1 + 10 \neq 0$, luego no está en el plano. Por tanto la recta y el plano son paralelos.

2. Hallar la recta perpendicular a la recta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$ trazada por el punto $P(2, 0, -1)$

   Necesitamos un vector dirección de la nueva recta:

   Procedimiento a): Hallamos el plano π perpendicular a la recta por P, $-x+4y+z+D = 0$, sustituyendo P: $-2 - 1 + D = 0; \quad D = 3; \quad \pi : -x + 4y + z + 3 = 0$

   Hacemos la intersección de π y r: $-(1-t)+4(2+4t)+(3+t)+3 = 0; \quad 13+18t = 0; \quad t = \dfrac{-13}{18}$,

   sustituyendo en r: $\begin{cases} x = 1 + \frac{13}{18} = \frac{31}{18} \\ y = 2 + 4\frac{-13}{18} = \frac{-16}{18} \\ z = 3 - \frac{13}{18}\frac{41}{18} \end{cases}$ tenemos el punto de intersección $M(\dfrac{31}{18}, \dfrac{-16}{18}, \dfrac{41}{18})$

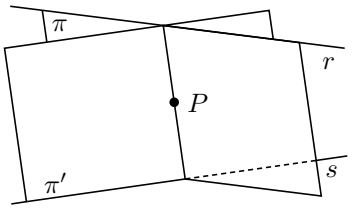
   Entonces el vector $\vec{PM} = \left(\dfrac{31}{18} - 2, \dfrac{-16}{18}, \dfrac{41}{18} + 1\right) = \left(\dfrac{-5}{18}, \dfrac{-16}{18}, \dfrac{59}{18}\right)$, como solo nos interesa la dirección tomamos como vector dirección de la recta buscada el proporcional $(-5, -16, 59)$

   Procedimiento b): Un punto genérico de la recta r es $P_r(1 - t, 2 + 4t, 3 + t)$, por tanto un vector $\vec{PP_r}$ de origen en P y extremo en un punto de r es $\vec{PP_r} = (1-t-2, 2+4t, 3+t+1) = (-1 - t, 2 + 4t, 4 + t)$, queremos que sea perpendicular al vector dirección de r, por tanto $(-1 - t, 2 + 4t, 4 + t) \cdot (-1, 4, 1) = 1 + t + 8 + 16t + 4 + t = 0; \quad 18t + 13 = 0; \quad t = \dfrac{-13}{18}$ y se sustituye en r para hallar M igual que antes.

La recta buscada es $s : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 0 - 16t \\ z = -1 + 59t \end{cases}$

3. Hallar, si existe, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1,2,3)$ y se apoya en las rectas r y s de ecuaciones: $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ $\quad s : \dfrac{x - \frac{11}{5}}{8} = \dfrac{y + \frac{9}{5}}{-7} = \dfrac{z}{-5}$

La recta buscada es la intersección del plano π que pasa por P y contiene a la recta r, con el plano π' que pasa por P y contiene a la recta s.



π :
punto P(1,2,3)
vector dirección de r : $\quad (2,3,4)$
punto de r : $\quad Q(0,3,1)$, vector $\vec{PQ} = (-1,1,-2)$,
más cómodo (1,-1,2)

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi : 2x - z + 1 = 0$$

π' :

punto P(1,2,3)
vector dirección de $s : (8,-7,-5)$, más cómodo (-8,7,5)
punto de s : $Q'(\frac{11}{5}, \frac{-9}{5}, 0)$, vector $\vec{PQ}' = (\frac{6}{5}, \frac{-19}{5}, -3)$, más cómodo (-6,19,15)

$$\pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -8 & 7 & 5 \\ -6 & 19 & 15 \end{vmatrix} = 0 \pi' : x + 9y - 11z + 14 = 0$$

como los planos π, π' se cortan, recta buscada:

$$\begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ x + 9y - 11z + 14 = 0 \end{cases}$$

Para pasarla a continua buscamos un vector dirección $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 21\vec{j} + 18\vec{k}$,

tomamos como vector dirección $(3,7,6)$; $\quad$ Recta buscada: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-3}{6}$

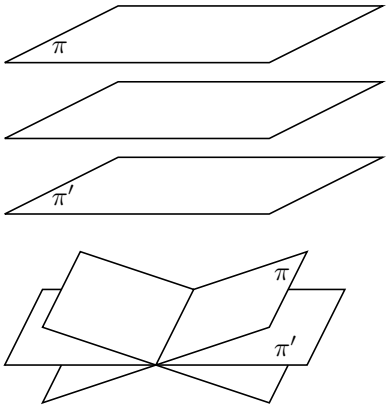
6.9. Haz de planos

Dados dos planos $\begin{array}{l} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}$.
se llama haz lineal de los planos π, π' al conjunto de planos de ecuación:

$s(Ax + By + Cz + D) + t(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \quad s, t \in R$

* si los planos π, π' son paralelos el haz es el conjunto de todos los planos paralelos a ellos.

* si los planos π, π' se cortan en una recta el haz es el conjunto de planos que contienen a esa recta.



Ejemplo Hallar el plano que pasa por el punto (0,0,1) y por la recta $\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + 5z + 7 = 0 \\ 3x - 4y - 7z + 2 = 0 \end{array} \right.$

El haz de planos con arista en esa recta es (dividiendo por uno de los parámetros queda uno solo) $2x - 3y + 5z + 7 + k(3x - 4y - 7z + 2) = 0$

haciendo que pase por el punto $5 + 7 + k(-7 + 2) = 0$ queda $k = 12/5$ luego el plano buscado es $5(2x - 3y + 5z + 7) + 12(3x - 4y - 7z + 2) = 0; \quad 46x - 63y - 59z + 59 = 0$

6.10. Incidencia de planos y rectas

1. Intersección de 2 planos

   $\begin{array}{l} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}$.

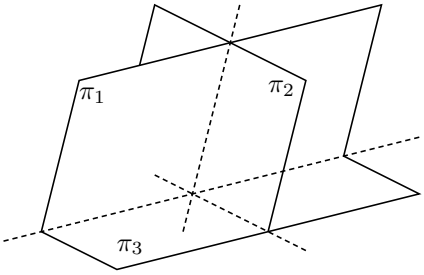
   estudiamos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz = -D \\ A'x + B'y + C'z = -D' \end{array} \right.$

   Si $\text{ran}(M) = 2$ es compatible indeterminado, soluciones dependientes de 1 parámetro: intersección una recta

   Si $\text{ran}(M) = 1 \left| \begin{array}{l} \text{ran}(A) = 2 \text{ incompatible: planos paralelos} \\ \text{ran}(A) = 1 \text{ planos coincidentes} \end{array} \right.$

2. Intersección de 3 planos

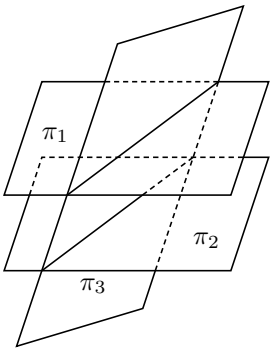
$$\begin{array}{l} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi'' : A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{array} .$$

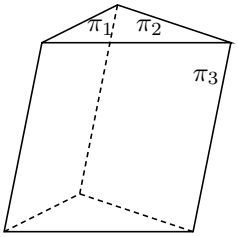


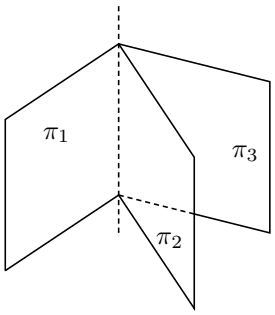
estudiamos el sistema $\begin{cases} Ax + By + Cz = -D \\ A'x + B'y + C'z = -D' \\ A''x + B''y + C''z = -D'' \end{cases}$

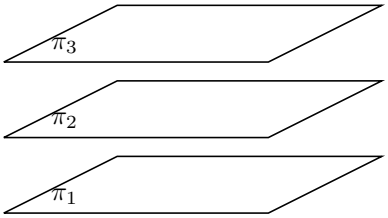
Si $\text{ran}(M) = 3$ compatible determinado: intersección un punto

Si $\text{ran}(M) = 2$
- $\text{ran}(A) = 3$ incompatible, no tienen puntos comunes, los planos se cortan, dos a dos, en 2 o 3 rectas paralelas (fig. 1 y 2)
- $\text{ran}(A) = 2$ compat. indeter. soluciones dependientes de 1 parámetro, intersección una recta (fig. 3)









$\text{ran}(M) = 1$
- $\text{ran}(A) = 2$ incompatible: planos paralelos
- $\text{ran}(A) = 1$ planos coincidentes

3. Intersección de recta y plano

Hay tres posibilidades: intersección un punto, que sean paralelos y que la recta esté contenida en el plano.

a) Si la recta viene dada como intersección de planos se puede considerar que el estudio queda incluido en el anterior de intersección de tres planos.

b) Si la recta viene dada en forma paramétrica:

Ejemplo Hallar la intersección de r y π siendo: $r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$ $\quad \pi : 2x + y + 3z + 1 = 0$

Sustituyendo en la ecuación del plano: $2(2 + 3t) + 1 - 2t + 3(-t) + 1 = 0$, y resolviendo esta ecuación resulta $t = -6$ luego se cortan en el punto (sustituyendo t en la ecuación de la recta): (-16,13,6).

Vemos que resulta una ecuación de grado 1 en t, luego los casos son:

una solución: r y π se cortan en un punto
sin solución: r y π se paralelos
infinitas soluciones: r está contenida en π

4. Intersección de dos rectas:

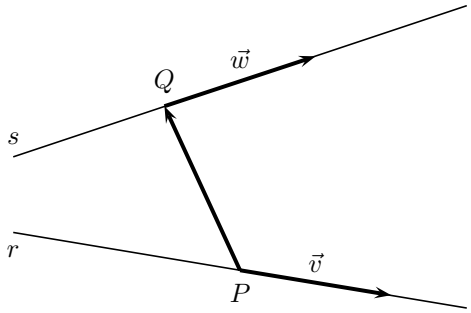
Hay cuatro posibilidades: paralelas, coincidentes , se cortan y se cruzan.

a) Si vienen dadas como intersección de planos se puede estudiar el sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas que resulta , es el método adecuado cuando hay parámetros. En otro caso, suele ser mejor el método para punto y vector dirección.

Ejemplo Estudiar según k la posición de $r : \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ky+3z=3 \end{cases}$ $s : \begin{cases} y=z \\ 3y-z=2 \end{cases}$ [1]

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8-2k$ se anula para $k=4$, como $\text{ran}(M)=3$, se tiene que: si $k \neq 4$ se cruzan; si $k=4$ se cortan. (nota para $k=2$, r no es recta)

b) Vienen dadas por punto y vector dirección:
$r : P, \vec{v}$; $s : Q, \vec{w}$.



Si $ran(\vec{v},\vec{w})=2$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no paralelos:

$$\begin{cases} ran(\vec{PQ},\vec{v},\vec{w})=2 \Longleftrightarrow det[\vec{PQ},\vec{v},\vec{w}]=0; \vec{PQ},\vec{v},\vec{w} \text{ son coplanarios } : r,s \text{ se cortan} \\ rango(\vec{PQ},\vec{v},\vec{w})=3 \Longleftrightarrow det[\vec{PQ},\vec{v},\vec{w}]\neq 0; \vec{PQ},\vec{v},\vec{w} \text{ no son coplanarios } : r,s \text{ se cruzan} \end{cases}$$

Si $ran(\vec{v},\vec{w})=1$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ paralelos:

$$\begin{cases} \vec{PQ} \text{ paralelo: rectas coincidentes} \\ \vec{PQ} \text{ no paralelo: rectas paralelas} \end{cases}$$

Ejemplo Hallar la posición relativa de las rectas:
$r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{2-z}{3}$ $s : \begin{cases} x=2z-3 \\ y=-z+5 \end{cases}$

---

[1] Vector director de $s : \begin{cases} y-z=0 \\ 3y-z=2 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}$

r: punto $P(0,1,2)$, vector dir. $\vec{v}=(3,-1,-3)$ (obsérvese que la recta r no está escrita exactamente en forma continua)

De las ecuaciones de s se escriben las paramétricas: $s:\begin{cases} x=-3+2t \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}$ luego s: punto $Q(-3,5,0)$, vector dir. $\vec{w}=(2,-1,1)$

Resulta $\vec{PQ}=(-3,4,-2)$. Vemos que $\vec{v},\vec{w}$ no son paralelos. Ahora estudiamos $det[\vec{PQ},\vec{v},\vec{w}]$

$\begin{vmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-22\neq 0$ por tanto las rectas se cruzan.

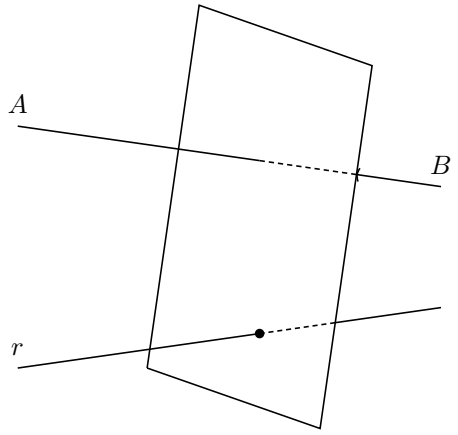
6.11. Distancia entre dos puntos

Dados $P(x_1,y_1,z_1);Q(x_2,y_2,z_2)$ su distancia es el módulo del vector $\vec{PQ}$

$$d(P,Q)=|\vec{PQ}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Ejemplo Hallar el punto de la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=z+2$ que equidista de los puntos $A(2,3,-1),B(0,2,0)$

El plano mediatriz de los dos puntos tendrá de ecuación:
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}$
$2x+y-z-5=0$ poniendo la recta en paramétricas y sustituyendo
$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-2+t \end{cases}$ $2(1+2t)+(-t)-(-2+t)-5=0,$
resulta $t=1/2$ luego el punto es $(1+1,-1/2,-2+1/2)=(2,-1/2,-3/2)$



6.12. Punto medio de un segmento

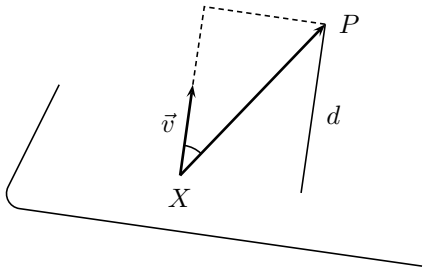
Dados los puntos $P(x_1,y_1,z_1)Q(x_2,y_2,z_2)$ sea $M(x_m,y_m,z_m)$ el punto medio, se tiene $\vec{PQ}=2\vec{PM}$ en consecuencia $\begin{cases} x_2-x_1=2(x_m-x_1) \\ y_2-y_1=2(y_m-y_1) \\ z_2-z_1=2(z_m-z_1) \end{cases}$ $x_m=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y_m=\dfrac{y_1+y_2}{2}$; $z_m=\dfrac{z_1+z_2}{2}$

nota : El plano mediatriz de un segmento $\bar{AB}$ se puede hallar como el plano de vector ortogonal $\vec{AB}$ que pasa por el punto medio del segmento $\bar{AB}$.

6.13. Distancia de un punto a un plano

Dados el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ se tiene:

$$\boxed{d(P,\pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|}$$



Demostración

Se trata de hacer de dos maneras el producto escalar de $\vec{w} = (A, B, C)$ ortogonal a π y $\vec{XP} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ vector de origen en un punto $X(x, y, z)$ culquiera de π y extremo P:

$\vec{w}.\vec{XP} = A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) =$

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax + By + Cz) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$, por otro lado:

$\vec{w}.\vec{XP} = |\vec{w}||\vec{XP}| \cos\alpha = |\vec{w}|$. proyección de XP sobre $\vec{w} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.d(P, \pi)$,

despejando queda la fórmula sin más que tomar valor absoluto pues consideramos que la distancia siempre es positiva.

Ejemplos

1. Hallar la distancia de la recta $r : \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ al plano $\pi : 14x + 7y - 23z = 0$

   Primero comprobamos la situación relativa de la recta y el plano considerando la matriz de coeficientes $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 14 & 7 & -23 \end{vmatrix} = 0$ luego son efectivamente paralelos o la recta está contenida en el plano

   entonces la distancia de la recta al plano será igual a la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano, obtenemos un punto de la recta haciendo por ej. $y = 0$, resulta $z = -1, x = -1$, punto $P(-1, 0, -1)$

   $$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \left| \frac{-14 + 23}{\sqrt{14^2 + 7^2 + (-23)^2}} \right| = \frac{9}{\sqrt{774}}$$

   nota: la **ecuación normal del plano** es la ecuación general en la que el vector ortogonal es unitario, entonces el término independiente es la distancia del origen al plano.

2. Hallar el punto de la recta $r : x = y = z$ que equidista de los planos $\pi : x - y + 2z = 1$,

   $\pi' : x + 2y - z = 4$

   Podemos:

   a) Hallar los planos bisectores de los dos planos ya que no son paralelos y luego su intersección con la recta.

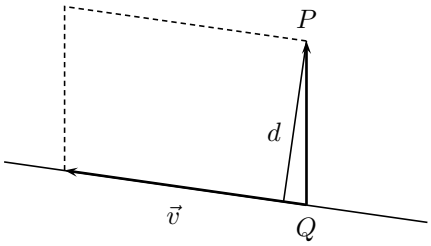
   b) Mejor: hallar las ecuaciones paramétricas de la recta y sustituir en las fórmulas de la distancia a cada plano: $r : x = t, y = t, z = t$

$$\overbrace{\left|\frac{t-t+2t-1}{\sqrt{1+1+4}}\right|}^{\text{dist. a } \pi} = \overbrace{\left|\frac{t+2t-t-4}{\sqrt{1+4+1}}\right|}^{\text{dist. a } \pi'}; 2t-1 = \pm(2t-4) \begin{cases} 2t-1 = 2t-4 \text{ sin solución} \\ 2t-1 = -2t+4; t = 5/4 \end{cases}$$

el punto es $(5/4, 5/4, 5/4)$; y podemos afirmar que la recta r es paralela a uno de los planos bisectores

6.14. Distancia de un punto a una recta

Dado un punto P y una recta r con punto Q y vector dirección $\vec{v}$



$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\vec{QP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}}$$

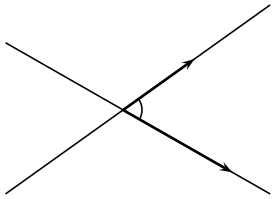
Demostración

El paralelogramo de lados $\vec{QP}$ y $\vec{v}$ tiene de área
$S = |\vec{QP} \wedge \vec{v}| =$ base . altura $= |\vec{v}|.d$

nota Método constructivo: Hallar el plano perpendicular a la recta por el punto, luego el punto de intersección de la recta y el plano, la distancia buscada es la distancia entre los dos puntos.

6.15. Angulos de rectas y planos

1. **Angulo de dos rectas**



Es el menor de los ángulos que forman.
Se halla a partir de dos vectores dirección.
(Se considera también en el caso de que se crucen).

Ejemplo Hallar el ángulo que forman las rectas

$$r : \frac{x-1}{2} = y-3 = z \quad s : \begin{cases} \frac{x+2}{-3} = \frac{y+5}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

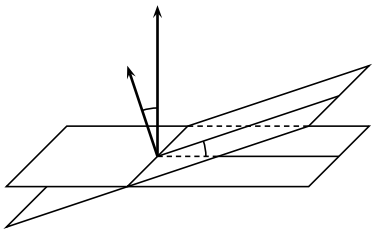
los vectores respectivos son $\vec{v} = (2,1,1); \vec{w} = (-3,4,0)$

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|}\right| = \left|\frac{-6+4}{\sqrt{6}.\sqrt{25}}\right| = \frac{2}{5\sqrt{6}} = 0'16$$

(se toma valor absoluto porque no sabemos si se trata del ángulo α o de su suplementario)
$\alpha = ar\cos 0'16 = 80^0 40'$

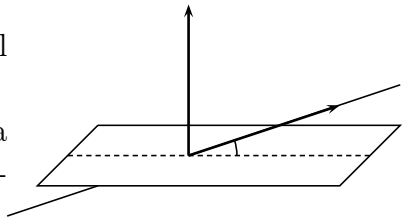
2. **Angulo de dos planos**

   Es el menor de los dos ángulos diedros que determinan.
   Se halla a partir del ángulo que forman los vectores ortogonales.



3. **Angulo de recta y plano**

   Es el menor ángulo que forma la recta r con su proyección ortogonal sobre el plano.
   Se halla a partir del ángulo que forman el vector dirección de la recta y el vector ortogonal del plano, el ángulo buscado es el complementario.



Ejemplo Hallar el ángulo que forma la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$ y el plano $\pi : 3x + 2y - 5z + 4 = 0$

$\vec{v} = (2, -1, 3); \vec{w} = (3, 2, -5); \quad \cos(\alpha') = \left|\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|}\right| = \left|\dfrac{6-2-15}{\sqrt{14}.\sqrt{38}}\right| = 0'4769; \quad ar\cos(0'4769) = 61'5^0$

Ángulo $\widehat{r,\pi} = 90 - 61'5 = 28'5^0$

6.16. Minima distancia y perpendicular común a dos rectas

En el caso en que las rectas sean paralelas el problema se resuelve hallando un plano perpendicular y la distancia entre los los puntos de corte.

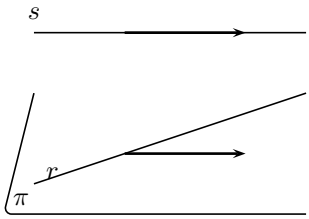
Los otros casos se pueden resolver por el método siguiente:

Ejemplo Hallar la mínima distancia entre las rectas
$r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = z; \quad s : x + 2 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$

Se halla el plano que contiene a r y es paralelo a s, y luego hallar la distancia de un punto cualquiera Q de s al plano:

Plano π que contiene a r y es paralelo a s es

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$



o sea $\pi : 11x + 5y - 7z - 1 = 0$, sea $Q(-2, 1, 0)$ de s

$$d(s, r) = d(Q, \pi) = \left|\frac{-22 + 5 - 1}{\sqrt{11^2 + 5^2 + (-7)^2}}\right| = \frac{18}{\sqrt{195}}$$

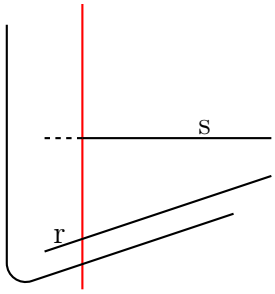
Ejemplo Hallar la perpendicular común a las rectas:

$r: x-1=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{2}$; $\quad s: \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-9}{4}=\dfrac{z-8}{5}$

Una vez comprobado que las rectas no son paralelas, el procedimiento es:

a) La perpendicular común tiene como vector dirección el vector perpendicular a los vectores dirección de las rectas dadas:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k} \text{ vector: } \vec{v_\perp}=(2,1,-2)$$



b) Ahora hallamos el plano π_r que contiene a una de ellas, por ejemplo r, y contiene a este vector $\vec{v_\perp}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad -6x+6y-3z-6=0,$$

$$\pi_r: 2x-2y+z+2=0$$

c) Ahora hallamos el punto de intersección de este plano π_r con la otra recta $s: \begin{cases} x=7+3t \\ y=9+4t \\ z=8+5t \end{cases}$

$2(7+3t)-2(9+4t)+8+5t+2=0; \quad 14+6t-18-8t+8+5t+2=0; \quad 6+3t=0$

$t=-2$; sustituyendo $\begin{cases} x=7+3(-2)=1 \\ y=9+4(-2)=1 \\ z=8+5(-2)=-2 \end{cases}$

La perpendicular común es: $\dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{z+2}{-2}$

Observación: el punto de intersección hallado $(1,1,-2)$, es el punto de de s cuya distancia a r es mínima.

Otro método: Ponemos las rectas en paramétricas $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=3+2t \\ z=2+2t \end{cases}$; $s: \begin{cases} x=7+3s \\ y=9+4s \\ z=8+5s \end{cases}$.

Consideramos el vector $\vec{Q,Q'}$ que va de un punto Q genérico de r a un punto Q' genérico de s:
$\vec{Q,Q'}=(7+3s-(1+t),9+4s-(3+2t),8+5s-(2+2t))=(6+3s-t,6+4s-2t,6+5s-2t))$

Hago que este vector sea paralelo al vector ortogonal $\vec{v_\perp}$, para ello sus coordenadas han de ser proporcionales:

$\dfrac{6+3s-t}{2}=\dfrac{6+4s-2t}{1}=\dfrac{6+5s-2t}{-2}$ que es un sistema dos ecuaciones y dos incógnitas t,s;

$\begin{cases} 6+3s-t=2(6+4s-2t) \\ -(6+3s-t)=6+5s-2t \end{cases} \quad \begin{cases} -5s+3t=6 \\ -8s+3t=12 \end{cases}$ de soluciones: $s=-2, t=\dfrac{-4}{3}$

Sustituyendo por ejemplo en s tenemos el punto de la perpendicular común: $s: \begin{cases} x=7-6 \\ y=9-8 \\ z=8-10 \end{cases}$.

El punto es $(1,1,-2)$

Ya tenemos un punto y el vector dirección de la perpendicular común.

Ejemplo Considere las rectas r y s dadas por las ecuaciones

$$r:\begin{cases}4x+3y-2z=12\\2x+5y-z=6\end{cases}\qquad \text{y}\qquad s:\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-6}{4}$$

a) Estudie la posición relativa de r y s.

b) Hallar la perpendicular común.

a) Parametrizamos la recta r: restando a la primera ecuación la segunda multiplicada por 2 queda $-7y=0$, $\quad y=0$ y sustituyendo en la segunda y despejando z resulta: $r:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-6+2t\end{cases}$

$$r:\begin{cases}\text{punto } P(0,0,-6)\\\text{vector } \vec{v}=(1,0,2)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}\text{punto } Q(5,1,6)\\\text{vector } \vec{w}=(3,-1,4)\end{cases}$$

Como no son proporcionales los vectores dirección podemos afirmar que nos son paralelas, consideramos el vector $\vec{PQ}=(5,1,12)$ veamos el rango de los tres vectores:

$$[\vec{PQ},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}5&1&12\\1&0&2\\3&-1&4\end{vmatrix}=0,\text{ por tanto las rectas se cortan.}$$

b) Par hallar la perpendicular común hallamos el vector perpendicular a r y a s usando producto vectorial $\vec{v}\wedge\vec{w}$

$$\vec{v}\wedge\vec{w}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\3&-1&4\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\text{ luego } (2,-2,1),\text{ será el vector dirección de la recta perpendicular común.}$$

Ahora hallamos el punto de intersección de r y s que sabemos que existe, para ello sustituimos en la primera igualdad de s las paramétricas de r: $\dfrac{t-5}{3}=\dfrac{0-1}{-1}$; $\quad t=8$ sustituyendo en r :

$$\begin{cases}x=8\\y=0\\z=-6+2\cdot 8=10\end{cases},\text{ punto de corte } (8,0,10),$$

luego la perpendicular común es: $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-10}{-1}$

Ejemplo Hállese si existe alguna recta que apoyándose en las rectas r y s sea perpendicular al plano π, siendo: $r: x=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$; $\quad s: x=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{4}\quad \pi: 2x-y+4z=0$

La recta buscada si existe ha de ser la intersección de los planos π_1 que contiene a r y es perpendicular a π; π_2 que contiene a s y es perpendicular a π

$$\pi_1:\begin{vmatrix}x&y-1&z-1\\1&-1&2\\2&-1&4\end{vmatrix}=0,\quad 2x-z+1=0$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}x&y-1&z\\1&-3&4\\2&-1&4\end{vmatrix}=0,\quad 8x-4y-5z+4=0$$

recta buscada: $\begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ 8x - 4y - 5z + 4 = 0 \end{cases} \qquad \dfrac{x + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{4}$

6.17. Problemas

1. Dados los puntos $P(4,2,5)$ y $Q(7,3,-1)$. Representar el vector $\vec{PQ}$

2. Hallar el vértice D en el paralelogramo ABCD dados los vértices $A(3,2,-1), B(3,-1,0), C(2,4,-1)$.

   Solución: $D(2,7,-2)$

3. Sabiendo que $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 2$ y que $\vec{x}.\vec{y} = 0'1$. Dados los vectores $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}, \vec{b} = \vec{x} - 2\vec{y}$:

   a) Calcular $\vec{a}.\vec{b}$

   b) Calcular los módulos $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

   c) Calcular el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$

   Solución: $\alpha = ar\cos\frac{-4'1}{12'6} = -0'32 \approx 108'66^0$

4. Determine un vector $\vec{v} = (x,y,z)$ de R^3, sabiendo que cumple las condiciones siguientes:

   · La suma de sus coordenadas es 6.

   · $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $(-6,1,3)$ y $(2,-2,-2)$.

   · El vector $(5,-4,2)$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

   Solución: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4x-6y+10z=0 \\ 5x-4y+2z=0 \end{cases}$ $\vec{v} = (2,3,1)$

5. Dado el triángulo de vértices A(1,1,1), B(0,3,5), C(4,0,2) hallar su área y la longitud de la altura desde B.

   Solución: $S = \frac{1}{2}|\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{\sqrt{230}}{2} = 7'58\sqrt{\frac{230}{11}} = 4'57$

6. Calcular los vectores de longitud 1 ortogonales a los vectores (2,-2,3) y (3,-2,3).

   Solución: $v = (0, 3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}), v' = (0, -3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$

7. Se consideran los puntos

   $A(1,a,1), B(1,1,a-2), C(1,-1,2)$

   1) Comprobar si están alineados según sea el valor que tome el parámetro a.

   2) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos para $a = 0$.

   Solución: $S = 1$

8. Hallar el área de la proyección del triángulo de vértices A(1,0,0), B(2,1,0), C(0,1,4), sobre el plano coordenado XY.

   Solución: $1u^2, C'(0,1,0)$

9. Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0), B(1,1,1), C(-2,1,0), D(0,1,3)$. a) Hallar el volumen. b) Hallar el área del triángulo ABC. c) Hallar la altura del tetraedro del vértice D. Solución: a) $V = \frac{7}{6}u^3$, b) $S = \frac{\sqrt{19}}{2}u^2$, c) $h = \frac{7}{\sqrt{19}}$

10. Hallar t para que los puntos P(3,2,0), Q(0,-1,0), R(3,t,1), S(2,1,-2) sean coplanarios.

    Solución: $t = 2$

11. Hallar las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto (2,3-1) y es paralelo al plano $2x - 3y + z = 3$.

    Solución: $\pi : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+s \\ z = -1-2t+3s \end{cases}$

12. Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos (2,3,-1), (1,0,-3) y es perpendicular al plano $2x - 5y = 2$.

    Solución: $\pi : 10x + 4y - 11z - 43 = 0$

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos (2,-1,0), (3,0,2), (2,-3,4).

    Solución: $4x - 2y - z - 10 = 0$

14. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto en que el plano $2x+y+3z=12$ corta al eje OZ y es perpendicular a los planos: $3x+2y-z=5$, $x-y+3z=2$

    Solución: $x-2y-z+4=0$

15. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3,0,5)$ y es perpendicular a la recta $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-2}{1}$. Hallar el punto de intersección.

    Solución: $(5,-1,3)$

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,1,2) y es paralelo a las rectas $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 4x+z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2y=0 \\ y-z=-3 \end{cases}$

    Solución: $x-5y+4z-4=0$

17. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $(x-1)/2=(y-1)/3=z$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos (2,0,0), (0,1,0)

    Solución: $x+2y-8z-3=0$

18. Dada la recta $r:(x,y,z)=(3,2,0)+t(2,0,-1)$ y el punto P(5,2,7) a) Hallar la recta perpendicular a r que pasa por P. b) Hallar la recta paralela a r que pasa por P.

    Solución: a) $\begin{cases} 2x-z-3=0 \\ y-2=0 \end{cases}$ b) $(x,y,z)=(5,2,7)+t(2,0,-1)$

19. Indicar la posición especial respecto a los ejes que tienen los planos en que uno o tres de los coeficientes A,B,C,D de la ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ sean nulos.

    Solución: A, B o C nulo, plano paralelo al eje de coeficiente nulo

    D, A, B nulos, plano $XY: z=0$, plano determinado por los ejes de los coeficientes nulos.

20. Estudiar la posición relativa de los planos $2x+3y-5z+7=0,\ 3x+2y+3z+1=0,\ 7x+8y-7z+13=0$.

    Solución: $ran(M)=2<3=ran(A)$, incompatible, los planos forman un prisma triangular

21. Siendo r la recta determinada por las ecuaciones $x-2y-2z=1, x+5y-z=0$; y π el plano definido por $2x+y+mz=n$, determinar m y n de modo que: a) r y π sean secantes b) r y π sean paralelos c) r esté contenida en π.

    Solución: a) $m\neq -23/7, \forall n; m=-23/7, n\neq 9/7$, c) $m=-23/7, n=9/7$

22. Escribir la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta de ecuaciones $x+y+z=1,\ x-y=2$.

    Solución: $\pi: x+3y+2z=0$

23. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1,1,2) y corta a las rectas $(x-1)/3=y/2=1-z,\ x/2=y=(z-1)/2$.

    Solución: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$

24. Dadas las rectas del espacio $\begin{cases} x=z-1 \\ y=2-3z \end{cases}$, $\begin{cases} x-4=5z \\ y=4z-3 \end{cases}$

    a) Decir si se cortan, son paralelas o se cruzan. b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y corta a las dos rectas dadas.

    Solución: a) Se cruzan; b) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+4y-31z=0 \end{cases}$

25. Hallar la posición relativa y en su caso la perpendicular común a las rectas:

    $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+5t \\ z=2-t \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-s \\ y=13+2s \\ z=0-3s \end{cases}$

Solución: $\frac{x-5}{-13} = \frac{y-13}{7} = \frac{z}{9}$

26. Hallar el ángulo de las rectas $(x-1)/3 = (y+1)/4 = (z+1)/5$; $-(x+1)/3 = -(y+2)/4 = (z-1)/5$.

    Solución: 90^0

27. Hallar el área del triángulo de vértices A(0,0,0), B punto de intersección de la recta $(x+1)/2 = (y+1)/3 = z+2$ con el plano XY y C(1,1,0).

    Solución: $1u^2$

28. Hallar la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos A(2,3,-5), B(4,1,2), y es perpendicular al plano: $(x, y, z) = (1, 0, -3) + t(2, 1, 0) + s(1, -1, 1)$.

    Solución: $x - 3 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3/2}{-3}$

29. Hallar la distancia del punto A(1,2,3) a la recta $r \equiv x = 0,\ z = 0$, y la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

    Solución: $y - 2 = 0, d = \sqrt{10}$

30. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y es paralela a los planos $3x + 2y - z = 1,\ x - y + z = 0$.

    Solución: $x - 1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{-5}$

31. Se consideran las rectas $r \equiv x-1 = y-2 = (z-1)/2,\ s \equiv (3-x)/2 = 3-y = (z+1)/2$.

    a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.
    b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y s.

    Solución: se cortan, $P(1, 2, 1)$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = z - 1$

32. Dada la recta $r \equiv x + 1 = y - 2 = \frac{z-3}{4}$, y el punto $P(1, 2, 1)$. Calcular:

    a) Las ecuaciones del plano π que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

    b) Hallar el punto de intersección de r y π.

    c) Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

    Solución: Procedimiento para hallar el simétrico de un punto, a) $x + y + 4z - 7 = 0$, b) $M(-4/3, 5/3, 5/3)$, c) $P(-11/3, 4/3, 7/3)$

33. Dada la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-8}{-3} = z + 2$ y el punto $(0, 3, 2)$. Consideremos el plano que contiene a la recta y el punto. Hallar el volumen del tetraedro que determina ese plano con los planos coordenados

    Solución: $x + 2y + 3z = 12$, $V = 48$

34. Hallar la distancia del punto A(1,2,3) al plano de ecuaciones $\begin{cases} x = s - t \\ y = 2 + 2s - 2t \\ z = -1 - 3s + 2t \end{cases}$

    Solución: $d = 2/\sqrt{5}$

35. Hallar el simétrico del punto (-1,1,2) con respecto a la recta $x - 2 = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$

    Solución: $P'(5/3, -13/3, -14/3)$

36. Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas $x = y = z,\ x = y = 3z - 1$.

    Solución: $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

37. Calcular la ecuación del plano que contiene al eje OX y dista 6 unidades del punto P(0,8,9).

    Solución: $y + kz = 0, k = \frac{-72 \pm \sqrt{3924}}{45}$

38. Sea el punto A(1,1,3) y la recta

    $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$. Hallar:

a) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por A.

b) La intersección de este plano con la recta dada r.

c) La distancia del punto A a la recta r.

Solución: a) $x+y+2z-8=0$, b) P(1,3,2), c) $d=\sqrt{5}$

39. Hallar el simétrico del punto (2,1,2) con respecto al plano $x+y-4=0$

Solución: $P'(3,2,2)$

40. Determinar un punto de la recta $(x-1)/2=(y+1)/3=(z+2)/2$ que equidiste de los planos $3x+4y-1=0$, $4x-3z-1=0$. ¿Es única la solución?.

Solución: $t=\frac{11}{16},(\frac{38}{16},\frac{17}{16},\frac{-10}{16})$;

$t=\frac{-7}{20},(\frac{6}{20},\frac{-41}{20},\frac{-27}{10})$

41. Para cada t real se considera el plano π_t de ecuación: $(1+2t)x+(1-t)y+(1+3t)z+2t-1=0$ Demostrar que todos los planos π_t pasan por una recta r y hallar la mínima distancia entre las rectas r y s siendo $s\equiv x-1=(y+1)/2=(z-2)/3$.

Solución: $x=\frac{4\lambda+1}{-3}, y=\frac{\lambda+4}{3}, z=\lambda; d(r,s)=\frac{19}{\sqrt{35}}$

42. Dados los planos $x+y=0, y+z=0$, encontrar la ecuación de un plano que forma ángulos iguales con los anteriores.

Solución: $x-z=0, x+2y+z=0$

43. Hallar el área de la proyección del triángulo de vértices (0,0,0), (2,1,3), (1,1,1) sobre el plano $x+y-z=0$.

Solución: $S=\sqrt{3}/3$

44. En el espacio euclídeo, referido a un sistema de coordenadas ortonormal, se eligen sobre los ejes OX, OY, OZ puntos A, B, C distintos del origen O de coordenadas A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c) respectivamente, tales que $1/a+1/b+1/c=1$. Demostrar que todos los planos ABC obtenidos al variar A, B y C verificando las condiciones anteriores pasan por un mismo punto P cuyas coordenadas se determinarán.

Solución: $P(1,1,1)$, el plano es $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

45. Hallar la proyección ortogonal de la recta $r:\begin{cases}2x+y=3\\ y-z=1\end{cases}$ sobre el plano $\pi: x+y-z+1=0$

Solución: $\dfrac{x-\frac{2}{5}}{-2}=\dfrac{y+\frac{7}{5}}{7}=\dfrac{z}{5}$

46. Hallar un punto C de la recta $r:(t,5+t,-2t)$, $t\in R$ que forme un triángulo rectángulo en A con $A(1,4,-1)$ y $B(-3,6,0)$

Solución: $C(\dfrac{7}{4},\dfrac{27}{4},\dfrac{-7}{2})$

47. Dado el triángulo de vértices

$A(0,1,0), B(1,-1,0), C(3,1,-2)$

a) Hallar el ángulo B

b) Hallar la mediana del vértice A

Solución: a) $\phi=arc\cos\dfrac{1}{\sqrt{15}}\approx 75^0$

b) $\dfrac{x}{-2}=y-1=z$

48. Hallar la recta que corta a las rectas

$$r_1:\begin{cases}x-y=2\\ 2y-z=1\end{cases}\quad r_2:\begin{cases}x=t\\ y=2\\ z=1-t\end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z+3=0$

Solución: $\pi_1: x+y-z-3=0; \pi_2: x+3y+z-7=0$

$\frac{x-5}{2}=\frac{y}{-1}=z-2$

49. a) Determinar el valor de los parámetros a y b de manera que la distancia entre los puntos $P(1+3a-b, a+b, 2-3a+b)$ y $Q(1,2,1)$ sea mínima.

    b) Determinar el punto P que da esa mínimaa distancia.

    Solución: a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, b) $(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$

50. Dados el plano $\pi : 2x + y + az = b$ y la recta $r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$

    a) Determina a y b para que π contenga a r. Solución: $a = 4, b = 3$

    b) ¿Para qué valores de a y b es r paralela a π. Solución: $a = 4, b \neq 3$

    c) ¿Para qué valores corta r a π. Solución: $a \neq 4, \forall b$

51. a) Determine la distancia del punto $A(12,-1,1)$ a la recta r que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y tiene como vector de dirección al vector $\vec{v} = (3,4,0)$.

    b) Encuentre qué punto (o puntos) de la recta r determina (o determinan) junto con A y P un triángulo de área igual a 50 unidades cuadradas.

    a) $d = 10$ b) $t = \pm 2$; $(7,9,1); (-5,-7,1)$

52. Hallar la ecuación general del plano que contiene al punto $P(1,-1,0)$ y a la recta $r : \begin{cases} 6x+3y+4z=10 \\ 4x+2y+z=5 \end{cases}$

    $-2x - y + z + 1 = 0$

53. Hallar el plano paralelo al plano $x + y + 8z = 1$ que contiene a la recta $\begin{cases} x-2y-5z=0 \\ 2x-y+3z=8 \end{cases}$

    $x + y + 8z - 8 = 0$

54. Se consideran las rectas:

    $r : \begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x-y=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

    a) Hallar la recta t de dirección perpendicular a las direcciones de r y s, que pasa por el origen.

    b) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t si existe.

    a) $t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$; $(3,-1,-1)$

    b) Se cruzan

Capítulo 7

PROBABILIDAD

7.1. Introducción

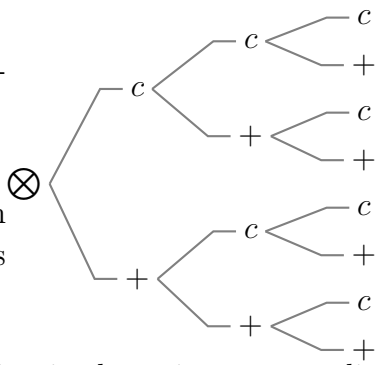
Fenómeno aleatorio es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

Cálculo de probabilidades es el modelo teórico de las regularidades que se observan en los resultados de los fenómenos aleatorios cuando crece el número de pruebas.

7.2. Sucesos

El conjunto de todos los resultados asociados a un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se suele representar por E

Ejemplo Escribir el espacio muestral del lanzamiento de una moneda tres veces a) por extensión, b) mediante diagrama en árbol.
a) $E = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$



Suceso es todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento lanzar un dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, son sucesos "salir par", "salir menos de 3".

Se dice que un suceso se ha verificado cuando al realizar la experiencia aleatoria correspondiente, el resultado es uno de los elementos de ese suceso. Si al tirar el dado sale un 6 se han verificado, entre otros, los sucesos $\{6\}, \{salir\ par\}, \{5, 6\}, E$.

Los sucesos formados por un solo elemento se llaman **sucesos elementales**, por ejemplo $\{6\}$.
El espacio muestral se llama también **suceso seguro**, el suceso $\emptyset$ se llama suceso imposible.

Hemos considerado los sucesos como conjuntos, por tanto hablaremos de:

inclusión $\subset$: $A \subset B$ (se lee A contenido en B), si todos los elementos de A están en B
unión $\cup$: $A \cup B$ se forma juntando los elementos de A y de B
intersección $\cap$: $A \cap B$ está formado por los elementos comunes a los dos
complementario $\bar{A}$: los elementos restantes que no están en A.

Existen también denominaciones propias del lenguaje de sucesos:
$A \subset B$ es $A \Longrightarrow B$ (se lee A implica B), la verificación del suceso A implica la del suceso B; ej $A =$ salir múltiplo de 3, $B =$ salir más de 2.
$A \cup B$ se verifica el suceso A **o** el suceso B, se verifica **al menos** uno de los dos
$A \cap B$ se verifica el suceso A **y** el suceso B
El complementario $\bar{A}$ del suceso A se llama suceso **contrario**.
Dos sucesos disjuntos, sin ningún elemento común: $A \cap B = \emptyset$ se llaman **incompatibles**.

7.3. Frecuencia de un suceso

Prueba es cada realización de un experimento aleatorio. Sea un experimento aleatorio del que se han realizado N pruebas. Si el suceso A aparece n veces se dice que en la referida muestra de N pruebas la frecuencia relativa del suceso A es $fr(A) = \dfrac{n}{N}$.

Observamos que: (podemos pensar en el lanzamiento 20 veces de un dado: $A =$salir par)
1) La frecuencia relativa de un suceso está comprendida entre 0 y 1.
2) La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.
3) La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de las respectivas frecuencias: si$A \cap B = \emptyset$, $\quad fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$

Por otro lado si por ejemplo se lanza una moneda 50 veces y salen 28 caras, no tiene por qué ocurrir que al repetir las 50 tiradas vuelvan a salir 28 caras, o sea, las frecuencias relativas suelen variar en cada serie de pruebas.

No obstante al aumentar el número de pruebas se tiene el siguiente resultado práctico llamado **ley del azar** : las frecuencias relativas de los sucesos tienden a estabilizarse alrededor de ciertos números, a estos números se les suele llamar probabilidad de los respectivos sucesos.

7.4. Probabilidad

Es el modelo teórico de las frecuencias relativas. Por tanto la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 y cumple las condiciones:
1) $p(E) = 1$, la probabilidad del suceso seguro es 1.
2) dados A, B sucesos incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, es decir la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades.

Probabilidad de **Laplace** es la que asigna a cada suceso elemental la misma probabilidad, por tanto la probabilidad de un suceso elemental es $\dfrac{1}{N}$ siendo N el número de sucesos elementales.

Entonces si el suceso A es la unión de n sucesos elementales tendremos:

$p(A) = \dfrac{n}{N}$ o en otras palabras $p(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

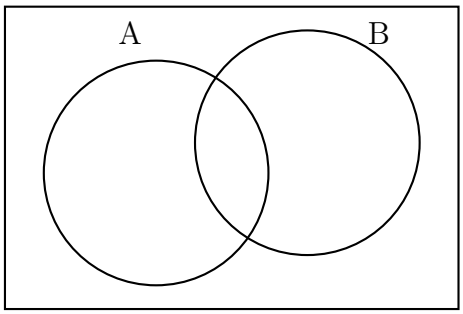
Por ejemplo en la extracción de una carta de una baraja española, la probabilidad de que salga un basto es $p(B) = \dfrac{10}{40}$

Probabilidad **estimada**, empírica o a posteriori de un suceso es la frecuencia relativa de la aparición del suceso cuando el número de observaciones es muy grande.

Por ejemplo a la vista de la producción de un gran número de piezas, una fábrica encuentra que el 20 % de los cerrojos producidos por una determinada máquina son defectuosos para unos ciertos requerimientos. Parece lógico asignar una probabilidad 0'2 de obtener un cerrojo defectuoso.

Propiedades de una probabilidad:

Las demostraciones se deducen de las condiciones de la definición de probabilidad.



1. La probabilidad del suceso imposible es 0:
$$p(\emptyset) = 0,$$
2. Para el suceso complementario se cumple:
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
3. Para la unión de dos sucesos cualesquiera se tiene:
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Ejemplos

1. Hallar la probabilidad de que salga bastos o figura al sacar una carta de una baraja española (40 cartas).

   $A =$ salir bastos, $p(A) = \dfrac{10}{40}$

   $B =$ salir figura (sota, caballo, rey), $p(B) = \dfrac{12}{40}$

   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{10}{40} + \dfrac{12}{40} - \dfrac{3}{40} = \dfrac{19}{40}$

2. Un dado ha sido manipulado de manera que la probabilidad de obtener un número es proporcional al mismo. Hallar la probabilidad de que se obtenga un número par al lanzarlo una vez.

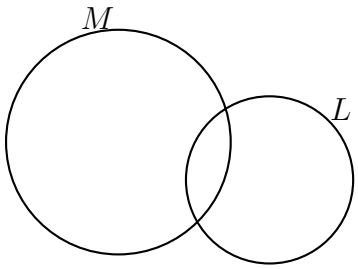
   Repartir proporcionalmente al número de la cara:

1
2
3
4 Hay que repartir toda la probabilidad, o sea, 1 entre 21: $\frac{1}{21}$
5
6
suma 21

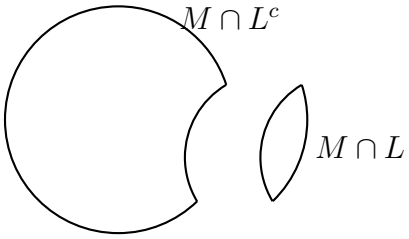
$$p(1) = 1\cdot\tfrac{1}{21}$$
$$p(2) = 2\cdot\tfrac{1}{21}$$
$$p(3) = 3\cdot\tfrac{1}{21}$$
$$p(4) = 4\cdot\tfrac{1}{21}$$
$$p(5) = 5\cdot\tfrac{1}{21}$$
$$p(6) = 6\cdot\tfrac{1}{21}$$

$p\{\text{ par }\} = p\{2\} + p\{4\} + p\{6\} = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{12}{21}$

3. La probabilidad de que un alumno apruebe Matemáticas es $0'6$ y la de que apruebe Lengua es $0'5$ y la de que apruebe las dos es $0'2$.



a) Hallar la probabilidad de que apruebe alguna (es decir, al menos una).
b) Hallar la probabilidad de que no apruebe ninguna.
c) Hallar la probabilidad de que apruebe Matemáticas y no Lengua.



a) $p(M \cup L) = p(M) + p(L) - p(M \cap L) = 0'6 + 0'5 - 0'2 = 0'9$
b) $p[(M \cup L)^c] = 1 - 0'9 = 0'1$
c) $M = (M \cap L^c) \cup (M \cap L)$ disjunta; $p(M \cap L^c) = p(M) - p(M \cap L) = 0'6 - 0'2 = 0'4$

4. Una urna contiene 25 bolas blancas de madera, 36 blancas de cristal, 39 bolas rojas en total, y 32 de madera en total.

a) Hallar el número total de bolas.

Si se elige al azar una bola:

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja y de madera?.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca o de cristal?.

a) Completamos el cuadro:

	rojas	blancas	
madera	7	25	32
cristal	32	36	68
	39	61	100

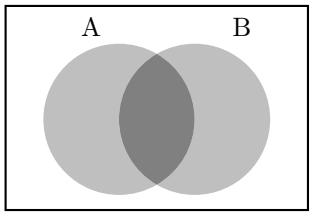
Consideremos los sucesos B = extraer bola blanca, M = extraer bola de madera, R = extraer bola roja. Entonces:

b) $p(B) = 61/100 = 0'61$

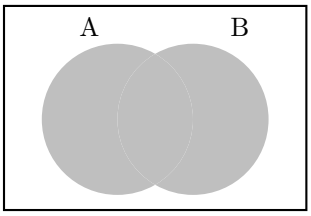
c) $p(R \cap M) = 7/100 = 0'07$

d) $p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0'93$

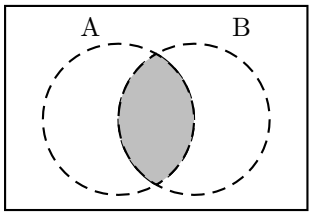
Nota Consideremos los sucesos A aprobar la asignatura A, B aprobar la asignatura B.



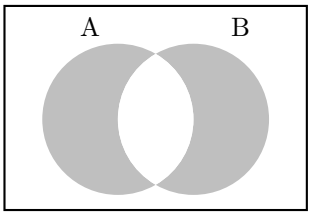
A = aprueba A
B = aprueba B



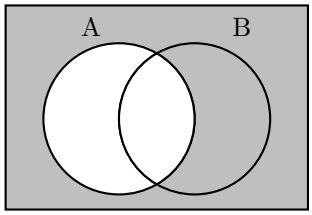
$A \cup B$ unión =
aprueba A **o** B =
aprueba alguna =
aprueba al menos una



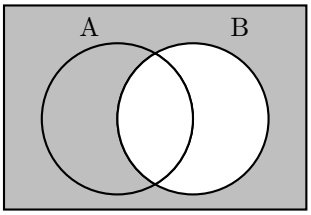
$A \cap B$ intersección =
aprueba A **y** B =
aprueba las dos



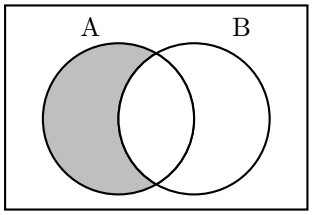
aprueba A o B pero no las dos =
aprueba una sola



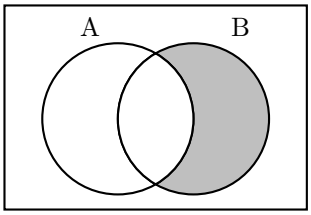
$\bar{A}$ = contrario de A =
no aprueba A =
suspende A



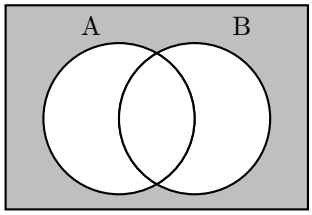
$\bar{B}$ = contrario de B =
no aprueba B =
suspende B



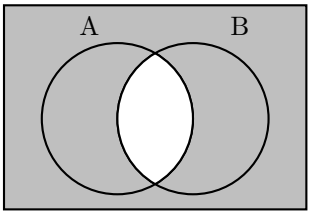
$A \cap \bar{B}$ = aprueba A y suspende B



$\bar{A} \cap B$ = suspende A y aprueba B



$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ = lo contrario de aprobar alguna = no aprueba ninguna = suspende las dos



$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ = lo contrario de aprobar las dos = suspende alguna

7.5. Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo Una caja contiene 10 piezas, de las cuales 4 son defectuosas.

I) Hallar la probabilidad de extraer dos defectuosas consecutivas

a) sin devolver la primera.

b) devolviendo la primera.

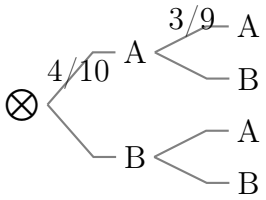
II) Sin devolver la primera, hallar la probabilidad de obtener una de cada tipo.

A = extraer pieza defectuosa ; B = extraer pieza no defectuosa

I) Para hallar la probabilidad de una rama se multiplican las probabilidades de la rama:

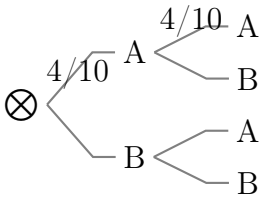
a) Sin devolución, sucesos dependientes:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1).p(A_2/A_1) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

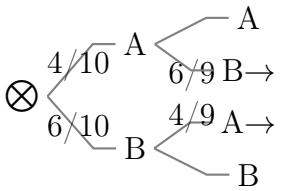


b) Con devolución, sucesos independientes:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1).p(A_2) = \frac{4}{10}.\frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$



II) Como es la unión de varias ramas, se suman las probabilidades de las ramas favorables:



$$p[(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)] = p(A_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap A_2) = \frac{4}{10}.\frac{6}{9} + \frac{6}{10}.\frac{4}{9} = \frac{24}{45}$$

Dos sucesos A y B son **independientes** si la realización de uno no varía la probabilidad de la realización del otro;

Si se lanza una moneda y un dado, el salir cara en la moneda es independiente de que salga par en el dado. Si lanzo una moneda la primera vez la probabilidad de salir cara es 1/2, si la lanzo la segunda vez la probabilidad de cara sigue siendo 1/2. En cambio si extraigo una carta de una baraja la probabilidad de salir espada la primera vez es 10/40, si no devuelvo la carta, evidentemente la probabilidad de salir espada en la segunda no es 10/40, pues ha cambiado la composición de la baraja.

Para sucesos independientes la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades: $p(A \cap B) = p(A).p(B)$

Dados dos sucesos A, B , se llama suceso B **condicionado al** A y se representa B/A, al suceso "realizarse el suceso B supuesto realizado el suceso A".

Para sucesos dependientes la probabilidad de la intersección es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo condicionado al primero: $p(A \cap B) = p(A).p(B/A)$

Ejemplos

1. Para no confundir la velocidad con el tocino se estudió una muestra de 100 casos y se obtuvieron estos datos:

	Tocino T	No tocino
Velocidad V	32	48
No velocidad	8	12

Según estos datos, ¿son independientes los sucesos T y V?

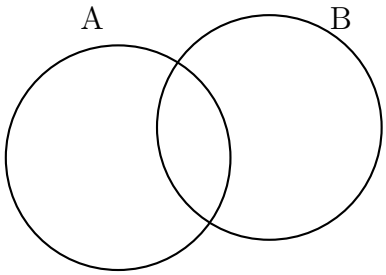
$p(V).p(T) = \dfrac{80}{100}.\dfrac{40}{100} = 0'32$

$p(V \cap T) = \dfrac{32}{100} = 0'32$

efectivamente la velocidad y el tocino , V y T son independientes.

2. Sean A y B dos sucesos independientes de un espacio de probabilidades. Sean $0'3$ y $0'6$ sus probabilidades respectivas. Hallar las probabilidades de cada uno de los sucesos siguientes:

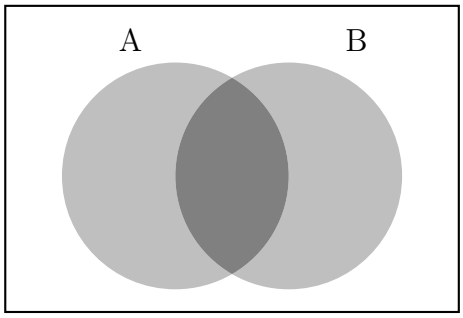
   S_1 acontece exactamente uno de los sucesos A o B, uno de los dos pero no los dos.
   S_2 acontecen los dos A y B.



   $p(S_1) = p(A \cup B - A \cap B) = p(A) + p(B) - 2p(A \cap B)$
   necesitamos $p(A \cap B)$ que es el 2^0 apartado, como son independientes:
   $p(A \cap B) = p(A).p(B) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18 = p(S_2)$
   luego $p(S_1) = 0'3 + 0'6 - 2 \cdot 0'18 = 0'54$

3. Sean A y B dos sucesos, tales que $p(A) = \frac{3}{4}$, $\quad p(B) = \frac{1}{2}$, $\quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$. Calcular:

   a) $p(A \cup B)$
   b) $p(A \cap B)$
   c) $p(\bar{A}/B)$
   Nota: $\bar{A}$ representa el suceso complementario de A.



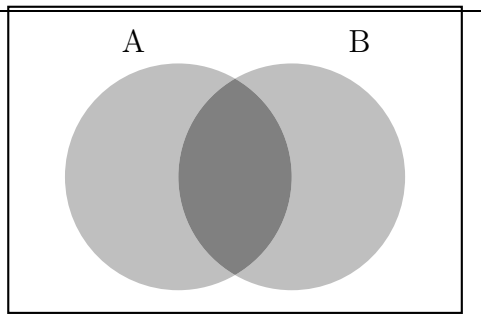
   a) Como vemos en el dibujo $A \cup B$ es lo contrario de $\bar{A} \cap \bar{B}$ por tanto $p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{19}{20}$

   b) Partiendo de la probabilidad de la unión:
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$,

   sustituyendo: $\dfrac{19}{20} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} - p(A \cap B)$ y despejando queda: $p(A \cap B) = \dfrac{19}{20} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$

   c) $p(\bar{A}/B) = \dfrac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{5}$

4. El 40 % de los alumnos de un curso aprueba la asignatura A. De los que aprueban la asignatura B, el 30 % aprueba la asignatura A. Además el 30 % no aprueba ninguna. Hallar la probabilidad de suspender B habiendo aprobado A.



Sea A "aprobar A"
Sea B "aprobar B"

$$p(A) = 0'4$$
$$p(A/B) = 0'3$$
$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0'3$$

$p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0'3 = 0'7$

$$\begin{cases} p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0'7 = 0'4 + p(B) - p(A \cap B) \\ 0'3 = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \end{cases}$$

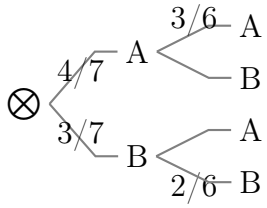
$$\begin{cases} 0'3 = p(B) - p(A \cap B) \\ p(A \cap B) = 0'3 \cdot p(B) \end{cases} \qquad 0'3 = p(B) - 0'3 \cdot p(B); \quad p(B) = \frac{3}{7}; \quad p(A \cap B) = \frac{9}{70}$$

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0'4 - \frac{9}{70} = \frac{19}{70}; \qquad p(\bar{B}/A) = \frac{p(\bar{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{19}{70}}{0'4} = 0'6786$$

La probabilidad de suspender B habiendo aprobado A es 67'86 %

5. En una urna hay bolas: 4 azules y 3 blancas. Se extraen dos bolas simultáneamente. Hallar la probabilidad de que sean las dos blancas sabiendo que han salido de igual color.

   Llamamos "cc" a igual color, piden $p(BB/cc)$



$$p(BB) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$
$$p(cc) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} + \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{3}{7}$$

   Para la intersección tenemos que $BB \subset cc$ luego $p(BB \cap cc) = p(BB)$:

   Despejando en la expresión: $p(BB \cap cc) = p(BB/cc) \cdot p(cc)$

   $$p(BB/cc) = \frac{p(BB \cap cc)}{p(cc)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

Observaciones:

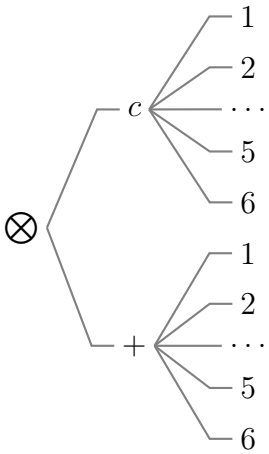
1. Resumiendo:

   independientes $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ **dependientes** $p(A \cap B) = p(B/A).p(A)$

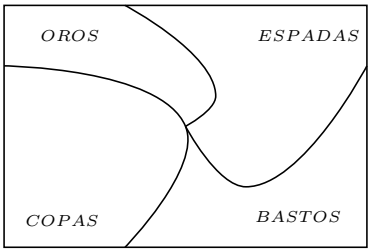
2. No confundir sucesos incompatibles (la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades), con sucesos independientes (la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades).Por eso:

   Dos sucesos compatibles pueden ser dependientes o independientes. Dos sucesos incompatibles necesariamente son dependientes.

3. En la extracción de, por ejemplo, dos bolas de una urna es lo mismo: extracción simultánea de las dos, que extracciones sucesivas sin devolución.
4. Experimentos independientes simultáneos es situación análoga a extracción sucesiva con devolución, esto permite utilizar diagrama en árbol. Por ejemplo se lanza un dado y una moneda.



7.6. Sistema completo de sucesos



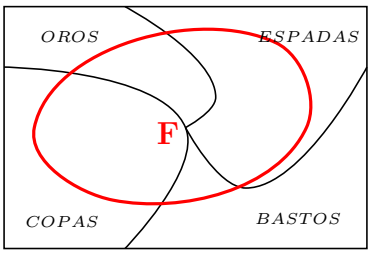
Un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un sistema completo de sucesos cuando:
1) son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$
2) su unión es todo el espacio muestral: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

Ejemplo: En la extracción de una carta de una baraja, los sucesos salir copas, salir espadas, salir bastos y salir oros forman un sistema completo de sucesos.

7.7. Teorema de la probabilidad total

Dado un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Sea B un suceso, entonces:

$$p(B) = \sum_{1}^{n} p(B/A_i).p(A_i)$$



Demostración:
$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$ unión disjunta

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + (B \cap A_n) = \sum_{1}^{n} p(A_i).p(B/A_i)$$

En el ejemplo anterior sea F salir figura (sota, caballo, rey), (llamaremos S salir espada)
Por ejemplo $p(F/C) = \dfrac{3}{10}$, pues hay tres figuras en las diez copas, por tanto:

$$p(F) = p(F/C).p(C) + p(F/B).p(B) + p(F/S).p(S) + p(F/O).p(O) = \frac{3}{10}\frac{10}{40} \cdot 4 = \frac{12}{40}$$

7.8. Teorema de Bayes

Dado un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Sea B un suceso, entonces:

$$p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i).p(A_i)}{\sum_1^n p(B/A_i).p(A_i)}$$

Demostración:

$$p(A_i/b) = \frac{p(Ai \cap B)}{p(B)} = \begin{array}{l}\text{sustituyendo el}\\ \text{denominador}\\ \text{por el teorema}\\ \text{anterior}\end{array} = \frac{p(A_i).p(B/A_i)}{\sum_1^n p(A_i).p(B/A_i)}$$

Se utilizan las siguientes denominaciones: $p(A_i)$ se llaman probabilidades a priori (si no se especifican se toman iguales), $p(A_i/B)$ se llaman probabilidades a posteriori, $p(B/A_i)$ se llaman verosimilitudes.

Ejemplo Una fábrica tiene tres máquinas que producen tornillos, la máquina 1ª produce el 10 % del total, la 2ª produce el 60 % y la 3^a el 30 % restante.

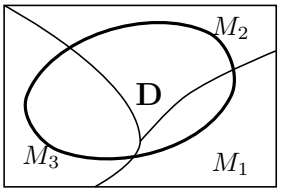
La probabilidad de que la primera produzca un tornillo defectuoso es 0'20, que lo produzca la segunda es 0'32 y la tercera 0'16.

a) De una caja de tornillos producidos por esa fábrica tomamos uno, ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?.

b) De una caja tomamos un tornillo y resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina 1^a?

c) Probabilidad de tomar un tornillo que sea bueno y de la máquina uno.

Solución:
sea M_1 el suceso "tornillo producido por la 1ª máquina"; $p(M_1) = 0'1$
sea M_2 el suceso "tornillo producido por la 2ª máquina"; $p(M_2) = 0'6$
sea M_3 el suceso "tornillo producido por la 3ª máquina"; $p(M_3) = 0'3$



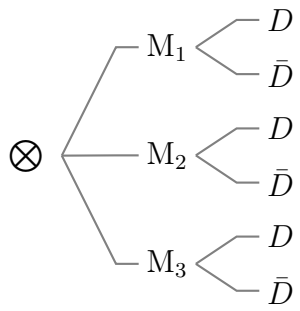
Suceso: $D =$ "coger un tornillo defectuoso"
las probabilidades del suceso D condicionadas por M_1, M_2, M_3 son
$p(D/M_1) = 0'20, p(D/M_2) = 0'32, p(D/M_3) = 0'16$

a) Por el teorema de la probabilidad total:
$p(D) = p(M_1).p(D/M_1)+p(M_2).p(D/M_2)+p(M_3).p(D/M_3) = 0'1\cdot 0'2+0'6\cdot 0'32+0'3\cdot 0'16 = 0'26$

b) Por Bayes: $p(M_1/D) = \dfrac{p(D/M_1).p(M_1)}{\sum_1^3 p(D/M_i).p(M_i)} = \dfrac{0'1 \cdot 0'2}{0'26} = \dfrac{1}{13}$

c) $p(M_1 \cap \bar{D}) = p(\bar{D}/M_1).p(M_1)$; $\quad p(\bar{D}/M_1) = 1 - p(D/M_1) = 1 - 0'2 = 0'8$
queda: $p(M_1 \cap \bar{D}) = 0'8 \cdot 0'1 = 0'08$

Otra forma con árbol:



a) $p(D) =$ suma tres ramas $= 0'26$

b) $p(M_1/D) = \dfrac{p(M_1 \cap D)}{p(D)}$

$$p(M_1 \cap D) = p(D/M_1).p(M_1) = 0'2 \cdot 0'1 = 0'02$$

$$p(M_1/D) = \frac{0'02}{0'26} = \frac{1}{13}$$

c) $p(M_1 \cap \bar{D}) = p(\bar{D}/M_1).p(M_1) = 0'8 \cdot 0'1 = 0'08$

7.9. Problemas

1. Escribir el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado dos veces. a) Mediante diagrama en árbol. b) Por extensión.

2. Escribir el espacio muestral correspondiente a la suma de puntos en el lanzamiento de un dado dos veces. ¿Tiene la misma probabilidad el 8 que el 3?.

   Solución: $p(tres) = 2/36$, $p(ocho) = 5/36$

3. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Escribir el espacio muestral.

4. Se tiran un dado y una moneda. Hallar la probabilidad de obtener cruz y número primo.

   Solución: 0'3333

5. En una urna hay 3 bolas blancas, 4 negras, 5 rojas y 6 azules. Hallar: a) Probabilidad de que al sacar una bola sea azul. b) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean blancas. c) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean, la primera negra y la segunda roja.

   Solución: a) 0'3333 b) 0'0196 c) 0'0653

6. Hallar la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja española: a) sean 2 oros, sin devolver la primera carta. b) sean 2 figuras, devolviendo la primera carta.

   Solución: a) 0'0576 b) 0'09

7. En una clase mixta hay 30 alumnas; 15 estudiantes repiten curso de los que 10 son alumnos y hay 15 alumnos que no repiten curso. a) Justificar que el número de estudiantes de esa clase es 55. b) Si se elige al azar un estudiante de esa clase: b_1) ¿Cuál es la probabilidad de sea alumno?. b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que repita curso y sea alumna?. c) Si se eligen dos estudiantes al azar ¿cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?.

   Solución: a) 55 estudiantes, b_1 25/55, b_2 5/55, c)52/99

8. La caja C_1 contiene 5 fichas azules y 3 rojas, la caja C_2 contiene 4 fichas azules y 6 rojas. Se traslada una ficha de la caja C_1 a la caja C_2; a continuación se extrae una ficha de C_2. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha extraída sea roja?.

   Solución: p(roja extracción 2ª caja) = 51/88

9. Si se tiene una moneda trucada de forma que al lanzarla la probabilidad de obtener cara es 2/3 y la probabilidad de obtener cruz es 1/3. Se efectúa la siguiente experiencia: se lanza la moneda al aire, y si sale cara se toma al azar un número del 1 al 9; si sale cruz se toma al azar un número del 1 al 5. Calcular la probabilidad de que al realizar la experiencia el número escogido sea par.

   Solución: p(n^o par) = 0'42 = 58/135

10. Dar las definiciones y poner ejemplos de los siguientes conceptos: i) Experimento aleatorio ii) Suceso seguro iii) Probabilidad de Laplace iv) Sucesos incompatibles.

11. Se lanzan simultáneamente tres monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que todas queden en el suelo del mismo modo?.

Solución: $p(c) + p(+) = 1/4$

12. Se extraen 3 cartas de una baraja española (40 cartas). Hallar la probabilidad de que sean 3 bastos; a) sin reemplazamiento; b) con reemplazamiento.

    Solución: a) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40{,}9/39{,}8/38 = 0'012$, b) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40{,}10/40{,}10/40 = 0'015$

13. Se lanzan 6 monedas simultáneamente. Calcular la probabilidad de que al menos salga una cara.

    Solución: 63/64

14. Consideremos la baraja española (40 cartas). Extraemos una carta al azar, miramos de que palo es y la devolvemos a la baraja. Repetimos la misma operación cuatro veces seguidas. Se pide: a) Probabilidad de haber sacado dos veces solamente una carta de oros. b) Probabilidad de haber sacado más de dos cartas de bastos. c) Hallar las probabilidades en los dos casos anteriores en el supuesto de que no devolvemos las cartas en cada extracción.

    Solución: a) 0'2109, b) 0'05078, c_1) 0'214, c_2) 0'041

15. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las bolas sean del mismo color.

    Solución: $1/3(11/21 + 3/4 + 29/45)$

16. Se lanzan dos dados. Calcular la probabilidad de

    i) Salir dos 6

    ii) Salir números consecutivos.

    iii) Salir dos números con suma igual a 7.

    Solución: i) 1/36, ii) 5/18, iii) 1/6

17. La probabilidad de que un hombre siga vivo dentro de 25 años es 3/5 y la de que su esposa lo esté es 2/3. Halle la probabilidad de que al cabo de ese tiempo

    i) Ambos estén vivos.

    ii) Solo viva el hombre.

    iii) Solo viva la esposa.

    iv) Al menos uno esté vivo.

    Solución: i) 6/15, ii) 1/5, iii) 4/15, iv) 13/15

18. De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos cartas. Encuentre la probabilidad de que:

    i) Al menos una sea espadas.

    ii) Una sea de espadas y otra de oros.

    Solución: i) 0'4414, ii) 6/47

19. Se lanza un dado y, a continuación, una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

    i) Cuatro y cara.

    ii) Cruz e impar.

    iii) Cara o un número mayor que 1.

    Solución: i) 1/12, ii) 3/12, iii) 11/12

20. En una urna hay 20 bolas blancas y 10 negras. Hallar la probabilidad de que al extraer dos bolas, realizando la extracción sin devoluciones, las dos bolas sean del mismo color.

    Solución: 47/87

21. Encontrar la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga: i) Dos seises. ii) Dos números iguales. iii) 8 de suma

    Solución: i) 1/36, ii) 1/6, iii) 5/36

22. Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 rojas y 6 negras. Se extrae al azar una bola y se sabe que no es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?. Se devuleve la bola a la urna y se extrae de nuevo una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o blanca?.

    Solución: i) 1/2, ii) 8/11

23. Se lanza un dado cinco veces y se anotan los números obtenidos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro números primos?. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los números sean compuestos?. (Nota: el número 1 se considerará primo).

    Solución: p(4 primos) = 80/243, p(5 compuestos) = $(2/6)^5 = 1/243$

24. Sean A y B dos sucesos, tales que $p(A) = \frac{1}{2}, \quad p(B) = \frac{2}{5}, \quad p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$

    1. $p(B/A)$

    2. $p(\bar{A}/B)$

    Nota: $\bar{A}$ representa el suceso complementario de A.

    Solución: a) 1/2, b) 3/8

25. Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades:

    $p(A) = 0'7; \quad p(B) = 0'5; \quad p(A \cap B) = 0'45$

    Calcular:

    a) $p(B/A)$

    b) $p(A^c \cap B^c)$

    Nota: A^c representa el suceso complementario de A.

    Solución: a) $0'6428$, b) $0'25$

26. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $p(A) = \frac{1}{4}, \quad p(B) = \frac{1}{3}, \quad p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{11}{12}$

    1. ¿Son A y B dos sucesos independientes? Razónese.

    2. $p(\bar{A}/\bar{B})$

    Nota: $\bar{A}$ representa el suceso complementario de A.

    Solución: a) son independientes, b) 3/4

27. Se lanza 6 veces un dado de póker ¿cuál es la posibilidad de que salga al menos un as?

28. Se tienen dos urnas A y B, en la primera hay 6 bolas negras y 4 rojas; en la segunda hay 3 bolas negras, 2 rojas y 5 blancas. Se lanza un dado y si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en caso contrario de la B. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola sea roja?.

    Solución: 4/15

29. Se lanzan a la vez 20 dados. Calcular las probabilidades:

    i) Sólo salga el número 6.

    ii) Salgan solo números pares.

30. Un dado está trucado de forma que la probabilidad de sacar 2 es doble que la de obtener 1; la de sacar 3 es triple que la de 1; la de 4 cuádruple que la de 1 y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 4?.

    Solución: 4/21

31. En una clase, el 40 % aprueban Filosofía y el 50 % Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la Filosofía habiendo aprobado las Matemáticas es 0'8. Prueba que la mitad de la clase suspende ambas asignaturas y calcula el porcentaje de alumnos que teniendo aprobada la Filosofía aprueban también las Matemáticas.

    Solución: a) 0'5 b) el 100 %

32. De una baraja española de 40 cartas se extraen 4 sucesivamente sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que sean del mismo palo.

    Solución: $4(10/40)(9/39)(8/38)(7/37) = 0'009$

33. La probabilidad de aprobar la asignatura A es 1/2 y la de aprobar la asignatura A habiendo aprobado la B es 2/3 . Además, la probabilidad de aprobar las dos es 2/5 .

    a) Hallar la probabilidad de aprobar una asignatura y suspender la otra.

    b) Calcular la probabilidad de aprobar A, habiendo suspendido B.

    Solución: a) 3/10 b) 1/4

34. En un grupo de estudiantes, un 40 % sabe inglés y alemán, un 10 % sabe inglés pero no alemán y, entre los que saben alemán, 2/3 sabe inglés.

    a) ¿Qué porcentaje sabe alemán?

    b) ¿Qué porcentaje sabe alguno de los dos idiomas?

    Solución: a) 60 b) 70

35. En un cierto edificio se usan dos ascensores; el primero lo usan el 45 % de los vecinos y el resto usan el segundo. El porcentaje de fallos del primero es del 5 % mientras que el del segundo es del 8 %. Si en un cierto día un inquilino queda "atrapado" en un ascensor, hallar la probabilidad de que haya sido en el primero.

    Solución: $\frac{225}{225+440} = 0'34$

36. Dos personas A y B organizan el siguiente juego: Tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A. Si no sale ningún 1, gana B. ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidades de ganar?

    Solución: $p(B) = (\frac{5}{6})^3 = 0'5787 > 0'5$ gana B

37. Dos amigos A y B juegan al tenis entre sí habitualmente. Han comprobado que de cada 10 sets A gana 6. Hallar la probabilidad de que B gane un partido a tres sets.

    Solución: árbol incompleto AA, ABA, etc 0'352

38. Pepe es el encargado de tirar los penaltis en su equipo, su probabilidad de hacer gol es 1/3. ¿Cuántas veces le deberá mandar repetir el lanzamiento de un penalti el árbitro del próximo encuentro para garantizar a Pepe un 75 % de posibilidades de hacer gol?

    Solución: $1 - (\frac{2}{3})^n \geq= 0'75, n = 4$

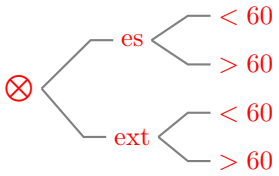
39. El 45 % de los habitantes de una determinada ciudad son del Barça y los demás son del Madrid. Un 27 % de los del Barça y el 38 % de los del Madrid además juegan al fútbol. Calcular la probabilidad de que al elegir un habitante: a) Juegue al fútbol b) Sea del Barça sabiendo que no juega al fútbol.

    Solución: a) 0'33, b) 0'4906

40. El 80 % de los turistas que el año pasado visitaron nuestra región eran españoles y de estos el 40 % tenían más de 60 años. De los

extranjeros el 75 % tenía más de 60 años. Escogida una persona al azar, se pide: a) Si no es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 60 años? b) Si es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 60 años? c) Cuál es la probabilidad de que tenga más de 60 años?

Solución:



a) $p(< 60/ext) = 0'25$

b) $p(> 60/es) = 0'40$

c)TPT $p(> 60) = 0'8 \cdot 0'4 + 0'2 \cdot 0'75 = 0'47$

41. Ana, Pedro y Juan se reparten los problemas que tienen que resolver. Se quedan respectivamente con el 23 %, 44 %, y 33 %. Sabemos que Ana resuelve correctamente el 60 % de los problemas que intenta, Pedro el 20 % y Juan el 40 %. a) Hallar la probabilidad de que al elegir un problema al azar esté mal hecho. b) Hallar la probabilidad de que al elegir un problema al azar y que resulta que está mal resuelto sea de los hechos por Juan.

Solución: a) 0'642, b) 0'308

42. Los datos de votantes en unas elecciones muestran que votó el 73'5 % de los hombres censados y que no votó el 42'9 % de las mujeres. El censo era de 48 % hombres y el 52 % mujeres.

De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. Calcular la probabilidad de que esta persona: a) Haya votado. b) Haya votado y sea hombre. c) Sabiendo que ha votado, sea mujer.

Solución: a) 0'649, b) 0'352, c) 0'457

43. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A,B y C. El número de unidades de cada tipo que produce es el mismo. Salen defectuosos de cada mil 15 del tipo A, 3 del tipo B y 7 del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70 % de todos los bolígrafos defectuosos de tipo A, el 80 % del tipo B y el 90 % del tipo C. Los bolígrafos defectuosos detectados en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcular la probabilidad de que sea de tipo A.

T= bolígrafo defectuoso tirado

A = defectuoso de A $p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{1000}$

B = defectuoso de B $p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1000}$

C = defectuoso de A $p(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{1000}$

$p(A/T) =$

$$\frac{p(T/A)p(A)}{p(T/A)p(A) + p(T/B)p(B) + p(T/C)p(C)} = \frac{0'7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{1000}}{0'7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{1000} + 0'8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1000} + 0'9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{1000}} = 0'546$$

44. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para A y 3/5 son para B. Sus ocupaciones les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50 % del tiempo y B el 25 %. Calcular la probabilidad de que no está ninguno para responder al teléfono. Llaman por teléfono y no lo cogen, cuál es la probabilidad de que llamen a A.

Solución: a) 0'35, b) 0'57

45. El despertador de Pepe no suena el 20 % de las veces. Cuando no suena el despertador llega tarde a clase el 84 % de los días, en cambio cuando suena llega tarde solo el 12 %. Hoy Pepe ha llegado puntual, cuál

es la probabilidad de que haya sonado el despertador.

Solución: 0'956

46. La fabricación de cierto tipo de objetos se hace en dos fases, la probabilidad de que resulte defectuoso en la primera fase es del 4 % mientras que en la segunda es del 1 %. ¿Cuál es la probabilidad de que un objeto tomado al azar no tenga defectos?

    Solución: por árbol en dos fases $p(nodef) = 0'96{,}0'99 = 0'9504$

47. Tenemos tres bolsas iguales, la A con 13 bolas negras y 15 blancas, la B con 16 bolas negras y 12 blancas y la C con 7 bolas negras y 13 blancas

    a) Se coge una bola de una bolsa al azar y resulta negra, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la bolsa A.

    b) Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

    Solución: a) Bayes (vuelta atrás de árbol) $p(A/n) = \dfrac{65}{194} = 0'33$

    b)árbol normal $p(b) = \frac{113}{210}$

48. El test para detectar una sustancia contaminante en agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0,99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0,05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0,99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

    El test detecta que el agua está contaminada, cuando en realidad no lo está el 83,33 % de las veces. Se trata de un mal producto.

49. Una urna A contiene 3 bolas blancas y una negra y otra urna B contiene 5 bolas negras y 7 blancas. Se extraen dos bolas de la urna A y, sin mirar el color, se introducen en la B. A continuación se extrae una bola de la urna B.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea negra?

    b) Si la bola extraída ha sido negra, cuál es la probabilidad de que las dos bolas pasadas de A a B fueran blancas.

    a) árbol $p(N) = 11/28$,

    b) Bayes: $p(pase2blancas/extraernegra) = \frac{p(\frac{extraernegra}{pase2blancas})p(pase2blancas)}{p(extraernegra)} = \frac{\frac{5}{14}(\frac{3}{4}\frac{2}{3})}{\frac{11}{28}} = \frac{140}{308}$

50. En química clínica son particularmente interesantes los llamados coeficientes falso-positivo y falso-negativo de un test. Tales coeficientes son probabilidades condicionadas. El coeficiente falso-positivo α es la probabilidad de que el contraste resulte positivo cuando de hecho el sujeto no padece la dolencia. El coeficiente falso-negativo β se define de manera análoga. Cada una de estas probabilidades es una probabilidad de error; por tanto, cabe esperar que los valores obtenidos en la práctica sean próximos a cero.

    Los resultados siguientes se obtuvieron en un estudio diseñado con el fin de averiguar la capacidad de un cirujano patólogo para clasificar correctamente las biopsias quirúrgicas como malignas o benignas ($T^+ =$ diagnóstico es positivo; $R^+ =$ la biopsia es en realidad maligna)

	T^+	T^-
R^+	79	19
R^-	7	395

Determinar α y β a partir de estos datos.

Solución:

$\alpha = p(T^+/R^-) = \dfrac{7}{402} = 0'017$; $\beta = p(T^-/R^+) = \dfrac{19}{98} = 0'193$

	T^+	T^-
R^+		$\beta = p(T^-/R^+)$
R^-	$\alpha = p(T^+/R^-)$	

Capítulo 8

VARIABLES ALEATORIAS. DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL.

8.1. Variable aleatoria. Función de distribución de probabilidad

Variable aleatoria es el modelo matemático de la variable estadística. Se dice que hemos definido una variable aleatoria X (v.a.) para un experimento aleatorio cuando hemos asociado un valor numérico a cada resultado del experimento.

Ejemplo Imagínese un juego de apuestas con estas normas: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euro si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. Se lanza el dado 60 veces y se obtienen los siguientes resultados:

3, 4, 6, 1, 3, 1, 1, 5, 6, 6, 1, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 5, 6, 1, 1, 3, 2, 4, 5, 5, 3, 2, 5, 6, 5, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 6, 1, 5, 5, 5, 5, 2, 4, 3, 3, 1, 4, 5, 2, 2, 6

Se considera la variable estadística que dé las ganancias y pérdidas:

Hacer la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

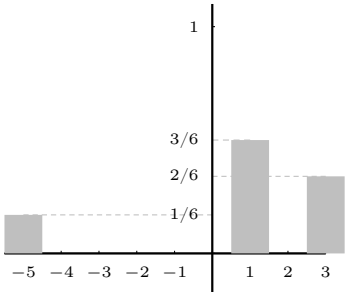
número	1	2	3	4	5	6
frecuencia	11	10	8	6	13	12

número	var. estad. X	frecuencia n_i	frec. relativa f_i
{ 3 }	-5	8	0'13
{ 4,5,6 }	1	31	0'51
{ 1,2 }	3	21	0'35
		$\Sigma N_i = 60$	

Ejemplo Considérese el juego anterior: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euros si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. La v.a. que describe las posibles ganancias en este juego es $X(1) = 3, X(2) = 3, X(3) = -5, X(4) = 1, X(5) = 1, X(6) = 1$.

A cada valor que toma la variable le asociamos la probabilidad del suceso que representa así obtenemos la **tabla de probabilidades** de una variable aleatoria discreta:

x_i	-5	1	3
p_i	$1/6$	$3/6$	$2/6$



Tomando intervalos de longitud uno con centro en los valores de la v.a. x_i tenemos el **histograma de probabilidad** de la v.a. X.

En el histograma de probabilidad la suma de las áreas de los rectángulos hasta un valor x_i (incluido el suyo) da la probabilidad $p(X \leq x_i)$.

Función de distribución de la v.a. X es la función que a cada número le asigna la probabilidad acumulada hasta ese número, se suele expresar: $F(x) = p(X \leq x)$

En el ejemplo: $F(2'5) = p(X \leq 2'5) = p(X = -5) + p(X = 1) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$

8.2. Relación entre variables estadísticas y aleatorias

Para muestras grandes las frecuencias relativas tienden a las correspondientes probabilidades, lo cual nos permite considerar a las funciones de probabilidad como el modelo teórico de las frecuencias relativas, que son las que se pueden obtener en la práctica. Es lo que llamábamos probabilidad empírica.

Así por ejemplo en el problema que veremos más adelante:

"En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de cuatro automóviles más de la mitad sean defectuosos?"

Se toma como probabilidad de que un automóvil resulte defectuoso $p = 10/1000 = 0'01$.

8.3. Parámetros de una variable aleatoria discreta

Recordemos que: la media de un conjunto de números es la media aritmética. La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza. La varianza es la media de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media.

Media de una variable estadística es: media $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \Sigma x_i f_i$

Desviación típica: (des. tip.)$^2 = \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 . n_i}{\Sigma n_i} = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 . f_i = \Sigma x_i^2 . f_i - \bar{x}^2$

Que se corresponden con los los parámetros una variable aleatoria discreta:

Esperanza matemática o media: $\mu = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i p_i$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i^2 p_i - \mu^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{ varianza}}$

Intuitivamente, si la variable aleatoria describe las ganancias y pérdidas de un determinado juego, la esperanza indica la ganancia media por partida que puede esperar un jugador. Si la esperanza es cero se dice que el juego es equitativo; en caso contrario, es favorable o desfavorable al jugador según que la esperanza sea positiva o negativa.

La desviación típica determina, junto con la esperanza, el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ en el que se espera se produzcan "la mayoría de los resultados".

En el ejemplo resultaría:

$E(X) = \frac{1}{6}(-5) + \frac{3}{6}1 + \frac{2}{6}3 = \frac{4}{6} = 0'666$

$\sigma^2 = \frac{1}{6}(-5)^2 + \frac{3}{6}1^2 + \frac{2}{6}3^2 - \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{260}{36} = 7'222; \quad \sigma = \sqrt{7'222} = 2'68$

8.4. Distribución binomial

Ejemplo En una bolsa hay 2 bolas blancas y 3 negras. Hacemos tres extracciones con devolución. Consideramos el número de bolas blancas que salen.

VARIABLE ESTADÍSTICA

Se han hecho 10 series de 3 extracciones con devolución de una bolsa con 2 bolas blancas y 3 negras. Consideramos el número de bolas blancas que salen en cada serie.

Supongamos que el número de bolas blancas en cada serie ha sido respectivamente: 1, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 0, 2, 0.

a) Hallar las frecuencias relativas y hacer un diagrama de barras de ancho uno.

b) Hallar la media y la desviación típica.

VARIABLE ALEATORIA

Se hacen 3 extracciones con devolución de una bolsa con 2 bolas blancas y 3 negras. Consideramos el número de bolas blancas que pueden salir.

a) Hacer el diagrama en árbol de la experiencia aleatoria.

b) Hacer la tabla de probabilidades y el histograma de probabilidad.

c) Calcular la media y la desviación típica

Solución:

VARIABLE ESTADÍSTICA

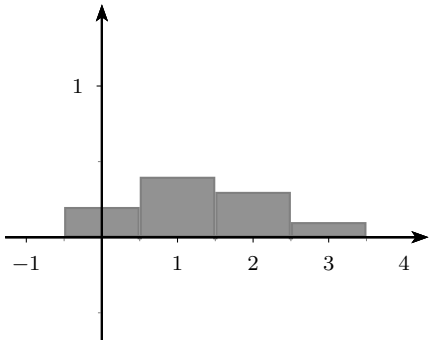
a)

frecuencias absolutas

x_i	0	1	2	3
n_i	2	4	3	1

frecuencias relativas

$\mathbf{x}_i$	**0**	**1**	**2**	**3**
$\mathbf{f}_i$	**0'2**	**0'4**	**0'3**	**0'1**



b)

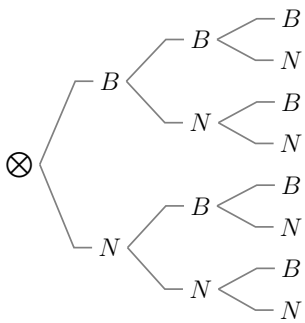
x_i	f_i	$x_i.f_i$	x_i^2	$x_i^2.f_i$
0	0'2	0	0	0
1	0'4	0'4	1	0'4
2	0'3	0'6	4	1'2
3	0'1	0'3	9	0'9
		$\Sigma x_i f_i = 1'3$		$\Sigma x_i^2.f_i = 2'5$

Media: $\bar{x} = \Sigma x_i f_i = 1'3$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 f_i - \bar{x}^2} = \sqrt{2'5 - 1'3^2} = \sqrt{0'81} = 0'9$

VARIABLE ALEATORIA

a)



b)

$p(3 \text{ blancas}) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0'064$

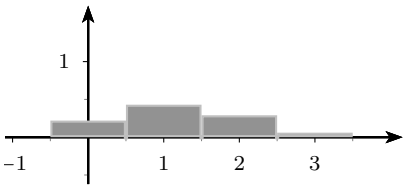
$p(2 \text{ blancas}) = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0'288$

$p(1 \text{ blancas}) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0'432$

$p(0 \text{ blancas}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0'216$

probabilidad

x_i	0	1	2	3
p_i	0'216	0'432	0'288	0'064



c)

x_i	p_i	$x_i.p_i$	x_i^2	$x_i^2.p_i$
0	0'216	0	0	0
1	0'432	0'432	1	0'432
2	0'288	0'576	4	1'152
3	0'064	0'192	9	0'576
		$\Sigma x_i p_i = 1'2$		$\Sigma x_i^2.p_i = 2'16$

Media: $\mu = \Sigma x_i p_i = 1'2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 p_i - \mu^2} = \sqrt{2'16 - 1'2^2} = \sqrt{0'72} = 0'84852$

Ejemplo En el lanzamiento de un dado se considera éxito obtener 5 o más puntos y fracaso lo contrario, por tanto probabilidad de éxito: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, probabilidad de fracaso: $q = \frac{2}{3}$. Supongamos que se hacen 10 pruebas.

Se trata de la distribución binomial $B(10, \frac{1}{3})$, consideremos la variable aleatoria: $X =$ número de éxitos en las 10 pruebas

Hallemos la probabilidad de tener 4 éxitos (y por tanto 6 fracasos), o sea de $X = 4$:

La probabilidad de tener 4 éxitos y 6 fracasos en un orden determinado, como los lanzamientos son independientes, es: $p.p.p.p.q.q.q.q.q.q = p^4.q^6$; como el orden no nos importa el suceso tener cuatro éxitos es la unión de los sucesos del tipo anterior, hay $\binom{10}{4}$ de estos sucesos (que son las posibilidades de "escoger" las cuatro tiradas con éxito entre las 10) por tanto la probabilidad buscada de $X = 4$, es sumar $\binom{10}{4}$ veces la cantidad $p^4.q^6$:

$$p(X = 4) = \binom{10}{4} p^4 q^6 = 210. \left(\frac{1}{3}\right)^4 . \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0'7868$$

En general:

Distribución binomial $B(n, p)$**:** Es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta que tiene las características:

1) En el experimento aleatorio hay dos resultados posibles "éxito" de probabilidad p y su contrario "fracaso" de probabilidad $q = 1 - p$. Las probabilidades no cambian en las sucesivas pruebas.

2) La variable aleatoria discreta es: $X =$ número de éxitos en n pruebas,

Entonces la probabilidad viene dada por:

$$\boxed{p(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \text{ con } q = 1 - p}$$

Los parámetros de la binomial son: $\mu = n.p, \quad \sigma^2 = n.p.q$

Ejemplo En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. Cuál es la probabilidad de que en un lote de seis automóviles

a) haya 2 defectuosos

b) más de la mitad sean defectuosos

c) haya alguno defectuoso

d) hallar la media y la desviación típica

Sea $p = 0'01$ la probabilidad de ser defectuoso; $B(6, 0'01)$

a) $p(X = 2) = \binom{6}{2} p^2 q^4 = 15 \cdot 0'01^2 \cdot 0'99^4 = 0'0014$

b) $p(X \geq 4) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) = \binom{6}{4} p^4 q^2 + \binom{6}{5} p^5 q^1 + \binom{6}{6} p^6 q^0 = 15 \cdot 0'01^4 \cdot 0'99^2 + 6 \cdot 0'01^5 \cdot 0'99 + 0'01^6 = 1'4761 \cdot 10^{-7}$

c) Mejor hacerlo por suceso contrario: $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} p^0 q^6 = 1 - 1 \cdot 0'99^6 = 1 - 0'9414 = 0'05852$

d) $\mu = 6 \cdot 0'01 = 0'06, \quad \sigma^2 = 6 \cdot 0'01 \cdot 0'99 = 0'0594 \quad \sigma = \sqrt{0'0594}$
nota: [1]

8.5. Variable aleatoria continua

Hasta ahora hemos visto casos en los que la variable aleatoria toma unos valores concretos. En estos casos se llama **variable aleatoria discreta**.

Pero hay otra posibilidad:

Ejemplo Lugar de rotura de una cuerda de 3 m al tirar de un extremo estando el otro fijo. El espacio muestral es $E =$ conjunto de lugares de rotura $= [0, 3]$. Consideramos la variable aleatoria:

$X =$longitud del punto de corte al punto fijo.

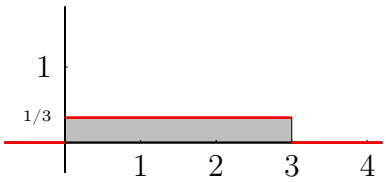
Vemos que la variable aleatoria puede tomar cualquier valor del intervalo $[0, 3]$. En este caso se llama **variable aleatoria continua**

$X =$longitud del punto de rotura al extremo fijo, toma cualquier valor entre 0 y 3.

Consideremos: probabilidad $= \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$; la probabilidad de que se rompa en un punto determinado, $X = x_0$, es cero pues en este caso $\dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{1}{\text{infinito}} = 0$. Por ello:

Lo que podemos considerar es la probabilidad de que la v.a. tome un valor menor o igual que uno dado, por ejemplo que se rompa antes de 2'5 metros.

$p(X \leq 2'5) = \dfrac{\text{longitud favorable}}{\text{longitud posible}} = \dfrac{2'5}{3}$



8.6. Función de densidad de probabilidad de una v.a. continua

Para una v.a. continua no tiene sentido hablar de probabilidad de que la variable tome un determinado valor porque habría que dividir por "infinitos" casos posibles

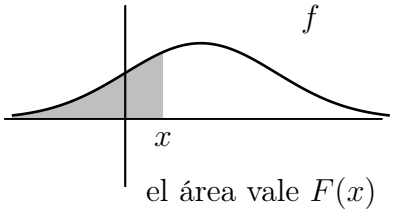
Entonces como modelo teórico del polígono de frecuencias relativas, se introduce el concepto de **función de densidad de probabilidad** f:

[1] Pueden ser útiles las siguientes propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{m}{h} = \frac{m^{(h}}{h!} \qquad \binom{m}{h} = \binom{m}{m-h}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

La probabilidad viene dada por $p(X \leq x) =$ área bajo la función densidad entre el inicio de la gráfica y el valor x.



función de densidad de probabilidad f(x) que indica la cantidad de probabilidad en esa zona:
Entonces
$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, o sea la función de distribución es el área bajo la curva $f(t)$ entre el inicio de la gráfica y el valor x.

Por tanto se cumple que una función de densidad siempre es positiva y además:
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, o sea el área desde el principio hasta el final vale 1.

Función de distribución de la v.a. X es la función que a cada número le asigna la probabilidad acumulada hasta ese número, se suele expresar: $F(x) = p(X \leq x)$

8.7. Parámetros de una variable aleatoria continua:

Media o Esperanza matemática: $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$

Varianza: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

Ejemplo Se define la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x/4 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Comprobar que se cumplen las condiciones de función densidad.

b) Representar gráficamente.

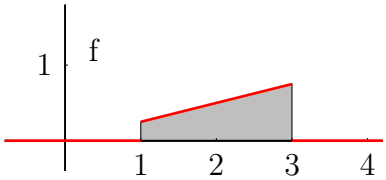
c) Calcular $p(1/2 \leq x \leq 2)$

d) Calcular la correspondiente función de distribución y representarla.

e) Calcular la media y la varianza

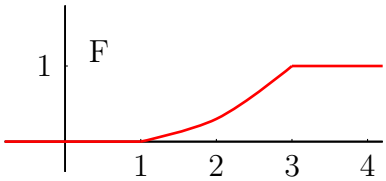
Solución:

a) f es siempre positiva y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^3 \frac{x}{4} = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^3 = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1,$



c) $p(1/2 \leq x \leq 2) = \int_{1/2}^{2} f(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{4} = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^2 = \frac{3}{8},$

d) $F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{t}{4}dt = \left[\frac{t^2}{8}\right]_1^x = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ x^2/8 - 1/8 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

e) media $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^3 x\frac{x}{4} = \frac{1}{4}\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^3 = \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} = 2'16$

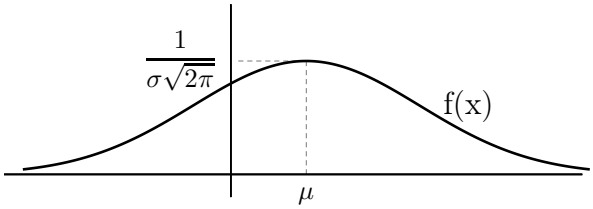
varianza $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx - \mu^2 = \int_1^3 x^2\frac{x}{4} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = 5 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} = 0'30$

8.8. Distribución normal

La variable aleatoria continua más utilizada es la normal su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

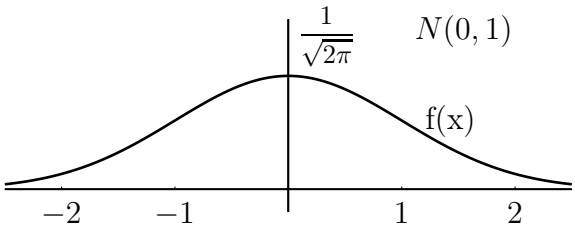
Se suele expresar $N(\mu, \sigma)$; los parámetros μ y σ son respectivamente el valor medio y la desviación típica, la curva se llama campana de Gauss.



La normal $N(0, 1)$ tiene de función densidad:

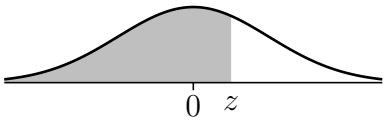
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

cuyos parámetros son $\mu = 0, \sigma = 1$, y tiene las probabilidades acumuladas por $f(x)$ tabuladas.

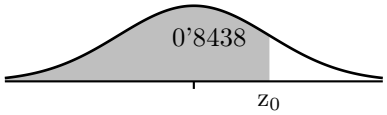


Utilización de la tabla de probabilidades de la normal $N(0, 1)$ Para la $N(0, 1)$ en nuestra tabla aparece $p(Z \leq z)$, siendo $z \geq 0$, para buscar otras probabilidades hay que utilizar la simetría de $f(z)$, y el complementario.

Ejercicios: Hallar: a) $p(Z \leq 0'34) =$
b) $p(Z < -2'85) =$ c) $p(Z \geq 2'1) =$
d) $p(Z \leq 3'8) =$ e) $p(-1 < Z \leq 2'37)$
a) $0'6331$ b) $0'0022$ c) $0'0179$ d) 1 e) $0'8325$



Proceso inverso: Dada la probabilidad, hallar el valor de la variable aleatoria



Ejercicio: En $N(0,1)$ hallar z_0 tal que $p(Z \leq z_0) = 0'8438$, resulta mirando en el cuerpo de la tabla: $z_0 = 1'01$

Probabilidades de una normal cualquiera Para hallar las probabilidades de una normal cualquiera $N(\mu, \sigma)$ se hace el cambio de variable (se llama **tipificar**) $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ que la transforma en la normal $N(0,1)$.

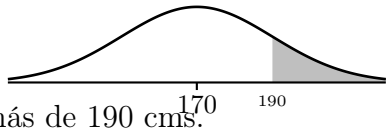
Ejercicio: Hallar en $N(8,3)$ el valor de $p(X \leq 9'6)$ $= p(Z \leq 0'53) = 0'7019$

Ejemplos

1. Se eligió una muestra de 1000 personas de una determinada población y resultó que su talla media era de 170 cm, con una desviación típica de 10 cm. Suponiendo que las tallas se distribuyen normalmente, calcúlese cuantas personas de esa muestra miden: a) Más de 190 cm; b) Entre 160 y 190 cm.

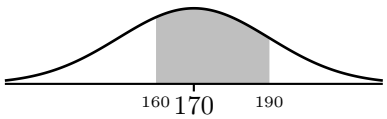
   La v.a. X que describe las tallas de la población es del tipo $N(170, 10)$.

   a)
   $p(X > 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{190-170}{10} = 2 \right\} =$
   $p(Z > 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$

   Es de esperar que haya $0'0228 \cdot 1000 = 22'8 \approx 23$ personas de más de 190 cms.

   b)
   $p(160 < X < 190) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{160-170}{10} = -1 \\ z_2 = \frac{190-170}{10} = 2 \end{array} \right\} = p(-1 < Z < 2) = \left\{ \begin{array}{l} p(z < 2) = 0'9772 \\ p(z < -1) = 1 - 0'8413 = 0'1587 \end{array} \right\} = 0'9772 - 0'1587 = 0'8185$

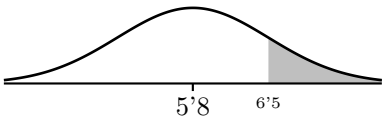
   

   O sea 818 personas aproximadamente medirán entre 160 y 190 cm.

2. En una prueba de selectividad se ha obtenido de nota media 5'8 y la desviación típica es 1'75. Suponemos que las notas están distribuidas normalmente. Todos los alumnos que sobrepasen la nota 6'5 serán admitidos en la universidad. ¿Qué porcentaje de admitidos cabe esperar?

$p(X \geq 6'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{6'5 - 5'8}{1'75} = 0'4 \right\} = p(Z \geq 0'4) = 1 - p(Z \leq 0'4) = 1 - 0'6554 = 0'3446$

Este valor es el tanto por uno, el tanto por ciento será 34'46 % de admitidos.

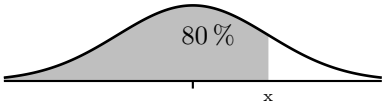


Ejercicio: Proceso inverso

3. En una normal $N(23, 12)$, hallar el valor de la variable de manera que a su izquierda esté el 80 % de la probabilidad.

   Al contrario que antes buscamos un x concreto tal que $p(X \leq x) = 0'8$

   En la $N(0, 1)$ tenemos que si $p(Z \leq z) = 0'8$, el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'7995 \text{ por defecto} \\ 0'8023 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'7995$ que corresponde con $z = 0'84$.

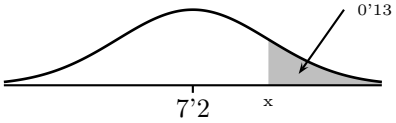
   

   sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\quad x = \sigma z + \mu = 12z + 23 = 12{,}0'84 + 23 = 33'08$

4. En una oposición la puntuación media del último examen fue 7'2 y la desviación típica 0'9. Hay plazas para un 13 % de los presentados. ¿Cuál es la puntuación mínima que un estudiante debe tener para conseguir plaza en la oposición?.

   Buscamos un x concreto tal que $p(X \geq x) = 0'13$

   Sabemos que $p(X \geq x) = 0'13$, en la $N(0, 1)$ para buscar en la tabla tenemos: $p(Z \geq z) = 0'13$, corresponde con $p(Z \leq z) = 0'87$ el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'8686 \text{ por defecto} \\ 0'8708 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'8708$ que corresponde con $z = 1'13$.

   sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\quad x = \sigma z + \mu = 0'9z + 7'2 = 0'9{,}1'13 + 7'2 = 8'21$

5. Las puntuaciones de un examen calificado entre 0 y 10 puntos siguen una distribución normal de media $\mu = 5$. El 6'3 por ciento de los alumnos tiene una puntuación por encima de 7'5, ¿qué tanto por ciento de los alumnos es de esperar que tengan una puntuación por debajo de 4 puntos?

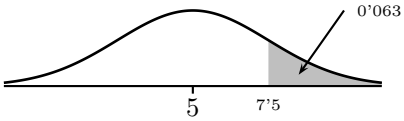
   Primero hemos de hallar σ :

   $p(X \geq 7'5) = 0'063$

   $p(Z \geq z) = 0'063 \longrightarrow p(Z \leq z) = 0'937$

   en las tablas: se obtiene $z = 1'53$

   el cambio $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, $\quad 1'53 = \dfrac{7'5 - 5}{\sigma}$, $\quad$ despejando $\sigma = 1'63$

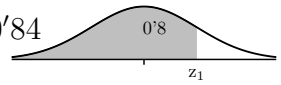
   

Piden $p(X \leq 4) = p(Z \leq -0'61) = 1 - p(Z \leq 0'61) = 1 - 0'7291 = 0'2709$

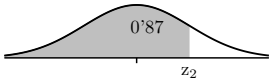
luego aproximadamente el 27'1 % de los alumnos sacará menos de 4.

6. De una distribución normal sabemos que $p(X < 30'56) = 0'8$ y que $p(X > 33'17) = 0'13$. Hallar la media y la desviación típica.

$$0'8 : \begin{cases} 0'7995 \longrightarrow z_1 = 0'84 \\ 0'8023 \end{cases}$$



$$0'13 \longrightarrow 0'87 : \begin{cases} 0'8686 \\ 0'8708 \longrightarrow z_2 = 1'13 \end{cases}$$



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \begin{cases} 0'84\sigma = 30'56 - \mu \\ 1'13\sigma = 33'17 - \mu \end{cases} \quad \begin{cases} 0'29\sigma = 2'61; \quad \sigma = 9 \\ \mu = 30'56 - 0'84 \cdot 9 = 23 \end{cases}$$ Resulta entonces $N(23, 9)$

7. De los 133 alumnos de primero de Bachillerato 37 han sacado menos de 4'5 en Historia y 43 más de 6. Suponiendo que las notas se distribuyen normalmente hallar la media y la desviación típica.

$$\frac{37}{133} = 0'2782 :\longrightarrow z_1 = -0'588$$

$$133 - 43 = 90; \frac{90}{133} = 0'6767 :\longrightarrow z_2 = 0'458$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \begin{cases} -0'588\sigma = 4'5 - \mu \\ 0'458\sigma = 6 - \mu \end{cases} \quad \begin{cases} 1'046\sigma = 1'5; \quad \sigma = 0'697 \\ \mu = 4'5 + 0'697 \cdot 0'588 = 4'5 + 0'41 = 4'9 \end{cases}$$ Resulta entonces $N(4'9, 0'697)$

8.9. Aproximación normal de la distribución binomial

Observamos que las tablas de la binomial $B(n, p)$ llegan hasta $n = 9$, para valores de n más grandes aplicaremos la aproximación de la binomial por la normal de igual media y desviación típica.

La aproximación normal de la distribución binomial es buena cuando $n.p > 5$ y $n.q > 5$.

Para mayor precisión, como la binomial toma valores enteros en la normal, que es continua, se toma el valor intermedio para repartir con el complementario, es decir si la binomial es X y la normal X' se toma $p(X \leq 23) \approx p(X' < 23'5)$

Ejemplos :

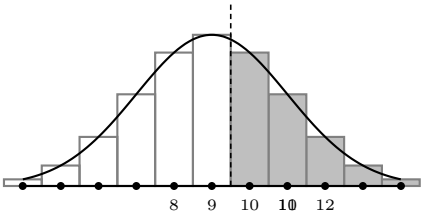
1. En un proceso de control de calidad se sabe que el 3 % de los artículos son defectuosos. Si estos se colocan en cajas de 300, se pide:

a) Probabilidad de que una caja contenga 10 o más artículos defectuosos.

b) Probabilidad de que el número de defectuosos esté comprendido entre 15 y 20 ambos inclusive.

c) Si se rechazan todas las cajas con más de 10 defectuosos y se examinan 125 cajas, ¿cuántas de ellas se rechazarán?

Solución: (para que resalte lo nuevo en este ejemplo no se detallan los cálculos de la normal)



La variable X que es $B(300, 0'03)$,
como $n.p = 9 > 5$, $n.q > 5$ podemos aproximarla por la variable X' normal:
$\mu = n.p = 9$, $\sigma = \sqrt{n.p.q} = 2'95$ X' es $N(9, 2'95)$

a) $p(X \geq 10) \approx p(X' \geq 9'5) = 0'4325$

b) $p(15 \leq X \leq 20) \approx p(14'5 \leq X' \leq 20'5) = 0'0314$

c) Puesto que la probabilidad de más de 10 defectuosas en cada caja es $0'4325$, en 125 cajas habrá que rechazar $125 \cdot 0'4325 = 54$ cajas.

2. La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 9 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 11 de ellos.

Solución:

a) La variable X que es $B(9, 0'1)$,

Piden $p(X \geq 2)$, calculamos la probabilidad del contrario:

$p(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{9}{0} 0'1^0 0'9^9 + \binom{9}{1} 0'1^1 0'9^8$ mirando las tablas $= 0'3874 + 0'3874 = 0'7748$

$p(X \geq 2) = 1 - 0'7748 = 0'2252$ es la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) La variable X es $B(200, 0'1)$ cumple $n.p = 200 \cdot 0'1 > 5$, $n.q = 200 \cdot 0'9 > 5$ y la aproximamos por la variable X' normal:

$\mu = n.p = 20$, $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{18} = 4'2426$

$X' :$ $N(20, 4'2426)$

$p(X \geq 11) \approx p(X' \geq 10'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{10'5-20}{4'2426} = -2'24 \right\} = p(Z > -2'24) = p(Z < 2'24) = 0'9875$ es la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 11 de ellos.

3. El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8'8 meses y una desviación típica de 3 meses.

   a) ¿Que porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses?

   b) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cual es la probabilidad de que al menos uno supere los 10 meses de vida?

   c) Si se toman al azar 50 especímenes, ¿cual es la probabilidad de que al menos 21 superen los 10 meses de vida?

   Solución:

   a) Tenemos la normal $N(8'8, 3)$, piden $p(X > 10) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{10-8'8}{3} = 0'4 \right\} = p(Z > 0'4) = 1 - p(Z < 0'4) = 1 - 0'6554 = 0'3446$

   El 34'46 % de individuos de esta especie supera los 10 meses

   b) Lo anterior se puede leer también: elegido un individuo al azar la probabilidad de que supere los 10 meses es $p = 0'3446$. Por tanto al elegir 4 tenemos ahora la variable X binomial $B(4, 0'3446)$

   Piden $p(X \geq 1)$, calculamos la probabilidad del contrario:

   $p(X = 0) = \binom{4}{0} p^0 q^4 = 0'6554^4 = 0'1845$

   $p(X \geq 1) = 1 - 0'1845 = 0'8155$ es la probabilidad de que al menos uno supere los 10 meses de vida

   c) Ahora la variable X es una binomial $B(50, 0'3446)$

   cumple $n.p = 50 \cdot 0'3446 = 17'23 > 5, \quad n.q > 5$ y la aproximamos por la variable X' normal:

   $\mu = n.p = 17'23, \quad \sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{11'29} = 3'36$

   $X' : \qquad N(17'23, 3'36)$

   $p(X \geq 21) \approx p(X' > 20'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{20'5-17'23}{3'36} = 0,97 \right\} = p(Z > 0'97) = 1 - p(Z < 0'97) = 1 - 0'8340 = 0'166$ es la probabilidad de que al menos 21 superen los 10 meses de vida

4. Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) Exprese como calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución:

a) La variable X que es $B(100, 0'45)$,

Piden $p(X = 40) = \binom{100}{40} p^{40} \cdot q^{60} = \binom{100}{40} 0'45^{40} \cdot 0'55^{60}$

b) La binomial $X : \quad B(100, 0'45)$ cumple $n.p = 100 \cdot 0'45 = 45 > 5, \quad n.q > 5$ y la aproximamos por la variable X' normal:

$\mu = n.p = 45, \quad \sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{24'75} = 4'9749$

$X' : \qquad N(45, 4'9749)$

$p(X = 40) \approx p(39'5 < X' < 40'5) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{39'5-45}{4'9749} = -1'11 \\ z_2 = \frac{40'5-45}{4'9749} = -0'90 \end{array} \right\} = p(-1'11 < Z < -0'90) =$

$\left\{ \begin{array}{l} p(z < -0'90) = 1 - p(z < 0'90) = 1 - 0'8159 = 0'1841 \\ p(z < -1'11) = 1 - p(z < 1'11) = 1 - 0'8665 = 0'1335 \end{array} \right\} = 0'1841 - 0'1335 = 0'0506$

5. Un test tiene 50 preguntas, cada una tiene cuatro opciones con una sola correcta. Si se contesta al azar. Hallar:

a) Probabilidad de acertar más de la mitad.

b) Probabilidad de acertar menos de 10

Solución:

a) La binomial $X : \quad B(50, 0'25)$ cumple $n.p = 50 \cdot 0'25 = 12'5 > 5, \quad n.q > 5$ y la aproximamos por la variable X' normal:

$\mu = n.p = 12'5, \quad \sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{9'375} = 3'062$

$X' : \qquad N(12'5, 3'062)$

a) Piden $p(X \geq 26) \approx p(X' > 25'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{25'5 - 12'5}{3'062} = 4'25 \right\} =$
$p(Z > 4'25) = 1 - p(Z < 4'25) = 1 - 1 = 0$

b) Piden $p(X < 10) = p(X \leq 9) \approx p(X' < 9'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{9'5 - 12'5}{3'062} = -0'98 \right\} =$
$p(Z < -0'98) = 1 - p(Z < 0'98) = 1 - 0'8365 = 0'1635$

8.10. Problemas

1. Se tiene un dado correcto, pero de tal manera que tres caras tienen el número 2, dos caras el número 1 y una cara el número 3. Se considera la variable aleatoria X que asigna a cada resultado del dado el número obtenido.

   a) Hacer una tabla con las probabilidades.

   b) Representar el histograma de probabilidad.

   c) Hallar la media y la desviación típica.

   Solución:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mu = 11/6, \sigma = \sqrt{17}/6$

2. Un tirador olímpico da en el blanco una media de 3 veces cada 5 disparos. Una competición es a tres disparos. Hallar la tabla de distribución aleatoria que considera el número de blancos. Representar la función de probabilidad. Hallar la probabilidad de hacer algún blanco. Hallar la media y la desviación típica.

   Solución:

x_i	0	1	2	3
p_i	0'064	0'288	0'432	0'216

$\mu = 1'8, \sigma^2 = 0'72, p(\text{algún blanco}) = 0'936$

3. En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. Se consideran lotes de 4 automóviles. Hallar la tabla de la distribución aleatoria que considera el número de defectuosos en un lote. Representar la función de probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de cuatro automóviles más de la mitad sean defectuosos?. Hallar la media y la desviación típica.

   Solución:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0'96	0'038	0'0005	0'000004	$\left(\frac{1}{100}\right)^4$

$\mu = 0'03912, \sigma = 0'19$

4. De cada 2.000 personas a los que se suministra cierto medicamento, 6 resultan alérgicas al mismo por término medio. Si en un determinado día se ha suministrado el medicamento a 400 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos una alérgica?

   Solución: $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{400}{0} p^0 q^{400} = 1 - 0'997^{400}$

5. En una urna hay cinco bolas blancas y cuatro bolas negras. Consideremos la variable aleatoria "número de bolas blancas" en el experimento consistente en realizar seis extracciones con devolución. Determinar la probabilidad de obtener al menos cuatro bolas blancas.

   Solución: X_i = n^o de bolas blancas en 6 extracciones con devolución $p(\text{al menos 4 blancas}) = p(X \geq 4) = 0'2455$

6. La probabilidad de que un hombre al disparar pegue en el blanco es 1/3. Hallar y representar la función de probabilidad de la variable aleatoria "número de blancos en cinco disparos".

   Solución: $B(5, \frac{1}{3})$

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0'12	0'31	0'31	0'15	0'03	0'0039

7. Una determinada raza de perros tiene cuatro cachorros en cada camada. Suponiendo que la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0'55, se pide: a) Calcular la probabilidad de que en una camada

dos exactamente sean hembras. b) Calcular la probabilidad de que en una camada al menos dos sean hembras.

Solución: a) 0'36, b) 0'609

8. En una urna que contiene tres bolas blancas y una negra se realizan tres extracciones con reemplazamiento. Hallar: a) La probabilidad de que una bola sea blanca y las otras dos negras. b) La probabilidad de que una bola al menos sea blanca. c) La tabla de distribución binomial para este caso. d) La representación gráfica de la función de probabilidad.

Solución: X= sacar blanca, B(3,3/4), a) $p(X = 1) = 9/64 = 0'1406$, b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - 0'0156 = 0'9844$

X_i	0	1	2	3
P_i	0'015	0'1406	0'4218	0'4218
F_i	0'015	0'1562	0'578	1

9. En una prueba de selectividad se suspende al 15 % de los estudiantes. a) Hallar el número esperado (o media) de los alumnos suspendidos y la desviación típica si, entre los estudiantes presentados se eligen 2.000. b) Hallar la probabilidad de que suspendan de un grupo de 6 alumnos: I) como máximo 2; II) por lo menos la mitad.

Solución: a) Bin(2000,0'15) prob susp 0'15, media np = 300, destip $\sqrt{npq} = \sqrt{255}$ b) B(6,0'15) I) $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{6}{x} 0'15^x, 0'85^{6-x} = 0'9526$, $p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - 0'9526 = 0'04735$

10. Se define la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 1/x & si \quad 1 \leq x \leq a \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

a) Hallar a para que cumpla las condiciones de función densidad. b) Representar gráficamente. c) Calcular la correspondiente función de distribución y representarla. d) Calcular la media y la varianza

Solución:

a) $a = e$, c) $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \ln x & si \quad 1 \leq x \leq e \\ 1 & si \quad x > e \end{cases}$

d) $\mu = e - 1, \sigma^2 = 0'241$

11. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(0,1)$ a) $p(z \leq 2'78)$; b) $p(z \leq -0'94)$; c) $p(z \leq -1'7)$; d) $p(-1'24 \leq z \leq 2'16)$

Solución: a) 0'9973, b) 0'1736, c) 0'0446, d) 0'8771

12. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(3,5)$ a) $p(x \leq 4'3)$; b) $p(x < -1)$; c) $p(2 \leq x \leq 10)$

Solución: a) 0'6026, b) 0'2119, c) 0'9192-0'4207=0'4985

13. Se supone que la estancia de los enfermos en un hospital sigue una distribución normal de media 8 días y desviación típica 3. Calcular la probabilidad de que la estancia de un enfermo, a) sea inferior a 7 días; b) sea superior a 3 días; c) esté comprendida entre 10 y 12 días.

Solución: a) 0'3708, b) 0'9515, c) 0'1628

14. Se llama cociente intelectual al cociente entre la edad mental y la edad real. Se sabe que la distribución de los cocientes intelectuales de 2.000 reclutas sigue una distribución normal de media 0'80 y desviación típica 0'50. a) Número de reclutas con cociente intelectual comprendido entre 0'7 y 1'2. b) Id. inferior a 0'3. c) Id. inferior a 0'9. d) Id. superior a 1'4.

Solución: a) 0'3674.2000 $\approx$ 735, b) 0'1587.2000 $\approx$ 318, c) $\approx$ 1159, d) $\approx$ 230

15. La media de las calificaciones obtenidas en las pruebas de acceso a la Universidad en cierta convocatoria fue $\mu = 4'7$ con una desviación típica $\sigma = 1'3$. Suponiendo que las calificaciones siguen una distribución normal, calcular: i) El porcentaje de aprobados. ii) El porcentaje de alumnos que obtuvo entre 4 y 6 puntos. iii) El porcentaje de alumnos que obtuvo menos de 3 puntos iv) El porcentaje de alumnos que obtuvo más de ocho puntos.

    Solución: N(4'4,1'3) i) $p(X \geq 5) = 40'9\,\%$ ii) $p(4 \leq X \leq 6) = 54'32\,\%$ iii) $p(X \leq 3) = 9'68\,\%$ iv) $p(X \geq 8 = 0'57\,\%$

16. Las estaturas de 500 reclutas están distribuidas normalmente con una media de 169 cms y una desviación típica de 7 cms. Calcular el número de reclutas cuya altura, i) está entre 165 y 175 cms ii) es mayor de 180 cms.

    Solución: N(169,7) i) $p(X \leq 175) = 0'823$, $p(X \leq 165 = 0'2843$, $p(165 \leq x \leq 175) = 0'518$ ii) $p(X > 180) = 0'0582$

17. Considérese la siguiente tabla de frecuencias agrupadas:

Intervalo	3'5-6'5	6'5-9'5	9'5-12'5	12'5-15'5
Frecuencia	3	5	9	6

    a) Dibujar el correspondiente histograma y calcular la media y la desviación típica. b) Calcular la probabilidad de que una variable Normal de media y desviación típica iguales a las obtenidas en el apartado a) sea mayor que 12'5.

    Solución: $\bar{x} = 10'35$, $\sigma = 2'93$, $p(X > 12'5) = 23'27\,\%$

18. Un profesor realiza un test de cien items a un curso con doscientos cincuenta alumnos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los alumnos siguen una distribución normal de media 64 puntos y desviación típica 10 puntos y denotando con $p(X \leq n)$ la probabilidad de obtener n puntos como máximo y con $p(X \geq n)$ la probabilidad de obtener al menos n puntos. Calcular: i) $p(X \geq 60)$, $p(X \leq 75)$, $p(30 \leq X \leq 60)$ ii) Número de alumnos que se espera que tengan al menos 45 puntos.

    Solución: i) $p(X \geq 60) = 65'5\,\%$, $p(X \leq 75) = 86'43\,\%$, $p(30 \leq X \leq 60) = 34'43\,\%$ $ii)0'9713{,}250 \approx 243$ alumnos

19. En una carrera la media del tiempo empleado ha sido de 73 minutos y la desviación típica 7 minutos. Se elimina al 5 % de los corredores. A partir de qué tiempo queda eliminado un corredor.

    Solución: se eliminan los que tardan más de 84'48 minutos

20. Una máquina ha producido 1.000 varillas de en teoría 1 m de longitud, con una desviación típica de 0'8 mm. De ellas se necesitan 640. ¿Entre qué medidas habrá que tomar las varillas para quedarse con las más exactas?.

    Solución: N(1000,0'8)); 0'64 + 0'18=0'8200; $\begin{cases} 0'8186 \\ 0'8212 \rightarrow z = 0'92 \end{cases}$ hay que tomarlas entre 999'27 y 1000'73

21. La media de las calificaciones obtenidas en una oposición fue $\mu = 5'5$ con una desviación típica $\sigma = 2$. Suponiendo que las calificaciones siguen una distribución normal, calcular:

    i) El porcentaje de alumnos que han sacado menos de 4.

    ii) Si hay 40 plazas y hay 2000 opositores, ¿cuál es la nota mínima para sacar plaza?

Solución: a) 22'66 %; b) 9'6

22. La probabilidad de que ocurra un suceso es 0'2.

    a) Cuantas veces hay que repetir el experimento para que la probabilidad de que ocurra ese suceso sea mayor que 1/2.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos dos veces es suceso si se realiza 5 veces el experimento?

    a) $0'8^n \leq 0'5; \quad n = 4$, b) 0'2627

23. En un experimento aleatorio la probabilidad de que ocurra un suceso es $0'46$. Hallar la probabilidad de que en 200 realizaciones del experimento ocurra el suceso al menos la mitad de las veces.

    Solución: 0'1446

24. El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria X ("número de respuestas acertadas") y se pide:

    a) Justificar que la variable X se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.

    b) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

    a) $X : B(300, 0'5)$, cumple $n \cdot p = 150 > 5, n \cdot q > 5, X' : N(150, 8'66)$, b) $p(X \leq 130) \approx 0'0122; \quad p(X = 160) \approx 0'0226$